

先月の解答・解説

2020 年 5 月の問題

1 から 10 までの整数を、分子と分母に好きなように掛け算した数を考えます。

例 1

$$\frac{6 \times 7 \times 8 \times 9 \times 10}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5} (= 252)$$

例 2

$$\frac{2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 8 \times 9 \times 10}{1 \times 6 \times 4} (= 6300)$$

例 1 と例 2 では、分数を約分した結果それぞれ 252 と 6300 になりました。

(1) たかしくんは、分母と分子に 1 から 10 までの数を上手く振り分けることで、約分の結

果をできるだけ小さい自然数にしたいです。どれだけ小さくできるでしょうか？

(2) 1 から 20 までの整数ではどうでしょうか。

(3) 1 から 100 までの整数ではどうでしょうか。

解説

4月に引き続いて試行錯誤ができる問題を出しました。

(1)(2)あたりは比較的楽に答えが出せたのではないのでしょうか。

(1) は、たとえば

$$\frac{7 \times 8 \times 9 \times 10}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6} (= 7)$$

という分数を考えることができ、これが最小です。他にも結果が7になる分数が4つあるので、探してみてください。

7より小さい自然数ができないことはどうやって説明できるでしょうか？

1から10の整数の中に7の倍数はひとつしかないから、分子か分母のどちらか片方しかは7の倍数になりません。したがって右辺は必ず7の倍数になるから、7が最小です。

とある本で、これを用いたパズルが出題されたと聞いています。「1から10までの数を2つのグループに分けて、その積が等しくなるようにできるか？」というパズルで、どちらか片方しか7の倍数にならないので不可能という答えでした。そこから「7は孤独な数字」と呼ばれたそうですが、よかったら調べて読んでみてください。

(2)も、(1)と同じ理由で11,13,17,19が必ず分子にこなければいけないので、約分の結果は $11 \times 13 \times 17 \times 19$ (= 46189)の倍数になります。あとは試行錯誤をすることで

$$\frac{2 \times 8 \times 9 \times 10 \times 11 \times 13 \times 14 \times 17 \times 18 \times 19 \times 20}{1 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 12 \times 15 \times 16} (= 11 \times 13 \times 17 \times 19 = 46189)$$

にたどりつくことができます。

(3)でも同様に考えれば、行くと、50より大きい素数(53,59,...,97)は分子に来るしかないので計算結果は

$$53 \times 59 \times 61 \times 67 \times 71 \times 73 \times 79 \times 83 \times 89 \times 97$$

の倍数になることがわかります。でも、そのほかの素因数についてはどうでしょうか。

もう少し発展させて考えてみます。100!を素因数分解すると

$$2^{97} \times 3^{48} \times 5^{24} \times 7^{16} \times 11^9 \times 13^7 \times 17^5 \times 19^5 \times 23^4 \times 29^3 \times 31^3 \times 37^2 \times 41^2 \times 43^2 \times 47^2 \\ \times 53 \times 59 \times 61 \times 67 \times 71 \times 73 \times 79 \times 83 \times 89 \times 97$$

です。(このあたりの話は今月の問題にかかわってくるので、来月に解説します)

このうち2に注目してみます。100!の中に素因数2は97個入っているのですが、97は奇数なので分母と分子に均等にふりわけることができません。したがって、約分したときにどうしても1つ以上2が残ってしまいます。同様に、11や13も残らないといけません。

つまり、(3)の答えは100!に奇数個含まれる素数をかけたもの

$$2 \times 11 \times 13 \times 17 \times 19 \times 29 \times 31 \times 53 \times 59 \times 61 \times 67 \times 71 \times 73 \times 79 \times 83 \times 89 \times 97 \\ (=311393038720877139922260794)$$

より小さくなりません。

あとは分母と分子の素因数の個数なるべく等しくなるように数をふりわけていくと(100から順に入れていくと良いです)、たとえば

$$\begin{aligned} \text{分子} &: 2 \times 4 \times 8 \times 9 \times 13 \times 14 \times 16 \times 17 \times 18 \times 19 \times 24 \times 25 \times 28 \times 29 \times 30 \times 31 \times 32 \times 33 \times 39 \times 45 \times 46 \times 49 \times 51 \times 53 \\ &\times 54 \times 55 \times 57 \times 59 \times 60 \times 61 \times 64 \times 65 \times 67 \times 71 \times 73 \times 74 \times 77 \times 79 \times 80 \times 81 \times 82 \times 83 \times 85 \times 86 \times 87 \times 88 \times 89 \times 91 \\ &\times 92 \times 93 \times 94 \times 95 \times 97 \times 98 \times 99 \times 100 \times 88 \times 80 \\ \text{分母} &: 3 \times 5 \times 6 \times 7 \times 12 \times 15 \times 20 \times 21 \times 22 \times 23 \times 26 \times 27 \times 34 \times 35 \times 36 \times 37 \times 38 \times 40 \times 41 \times 42 \times 43 \times 44 \times 47 \times 48 \\ &\times 50 \times 52 \times 56 \times 58 \times 62 \times 63 \times 66 \times 68 \times 69 \times 70 \times 72 \times 75 \times 76 \times 78 \times 84 \times 90 \times 96 \times 11 \times 10 \end{aligned}$$

のように振り分ければ答えは上の数(311393038720877139922260794)になります。

この解説を作るにあたって、「素因数の偶奇を確かめるだけでよいのではないか?」、つまり

1からnの数をふりわけるとき、常にちょうどよい振り分け方が存在するか?

について考えてみたのですが、結論を出せませんでした。これが証明できれば、試行錯誤は必要ないですよ。ね。わかったひとがいたら教えてください。