

先月の解答・解説

2020 年 4 月の問題

4 8 という数は、桁の数字に 4 と 8 を一回ずつ使っていて、

4 でも 8 でも割り切れます。

1 7 5 という数は、桁の数字に 1 と 7 と 5 を一回ずつ使っていて、

1 でも 7 でも 5 でも割り切れます。

もっと大きい数で同様の性質をみたすものはあるでしょうか？

また、この性質をみたす最大の数は何でしょうか？

解説

4月ということで、いろいろ試行錯誤ができる問題にしてみました。実際、この性質をみたす数は全部で548個あり、その中で175より大きいものは526個あります。

ある数がある数で割り切れるかどうかについて、判定法が数学Aの教科書に載っていますね。

2で割り切れる	⇔	下1桁が偶数
3で割り切れる	⇔	各桁の和が3の倍数
4で割り切れる	⇔	下2桁が4の倍数
5で割り切れる	⇔	下1桁が5の倍数
6で割り切れる	⇔	2の倍数かつ3の倍数
8で割り切れる	⇔	下3桁が8の倍数
9で割り切れる	⇔	各桁の和が9の倍数

これがなぜ正しいかについては数学Aの教科書を見てもらうとして、これを用いて最大で何桁の数を考えればよいかについて考えましょう。

① 0は使えない

「0で割り切れる自然数」は存在しないので、数字の0を使うことはできません。

② ‘5’ と ‘2, 4, 6, 8’ のうち片方は使えない

下1桁が5であれば偶数では割り切れず、下1桁が偶数であれば5では割り切れません。したがってどちらかをあきらめる必要があります。

偶数をあきらめてしまうと一気に使える数字が減ってしまうので、ここでは5をあきらめることにしましょう。

(ちなみに偶数をあきらめた場合、条件をみたす最大の数字は9315になります)

③ 残った数字のうち ‘4’ か ‘9’は使えない

残りの数字は1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9の八個です。

この八個をすべて使って数を作った場合、数字がどんな順番で並んでも各桁の和は40です。したがって作った八桁の数は3, 6, 9で割り切れません。

ところが、ここで4を使うのをあきらめれば各桁の和は36になり、3と6と9を使うことができます。したがって4をあきらめるのがよさそうです。

(4でなくて1や7をあきらめる可能性もありますが、その場合9を使うことはできません。)

以上のことから、

- 条件をみたす数は最大でも七桁
- 七桁の場合、その数は「1, 2, 3, 6, 7, 8, 9」の七個の数字を並び替えたものになる

ということがわかりました。

あとは、この7個の数字を使った数を、大きいほうから

9876321, 9876312, 9876231, 9876213, 9876132, 9876123, 9867321, 9867312, …

と遡っていくと、7個め¹の数「9867312」が条件をみたすことがわかるので、これが最大です。

さて、紙面が余ったのでもうひとつ問題を出そうと思います。

【追加の問題1】

48は、今回の条件は満たしますが、 $4 \times 8 = 32$ では割り切れません。

175は、今回の条件をみたし、さらに $1 \times 7 \times 5 = 35$ でも割り切れます。

このような条件をみたす数は全部で49個ありますが、最大のものはいくつでしょう？

【追加の問題2】

今回は十進法で考えましたが、8進法や7進法（数学Aで学習します）ではどうでしょう？

¹ 実際には、条件をみたす数は必ず偶数であるから奇数を飛ばしても良いです。その場合は3個めでヒットしますね。