

先月の解答・解説

2020 年 2 月・3 月の問題

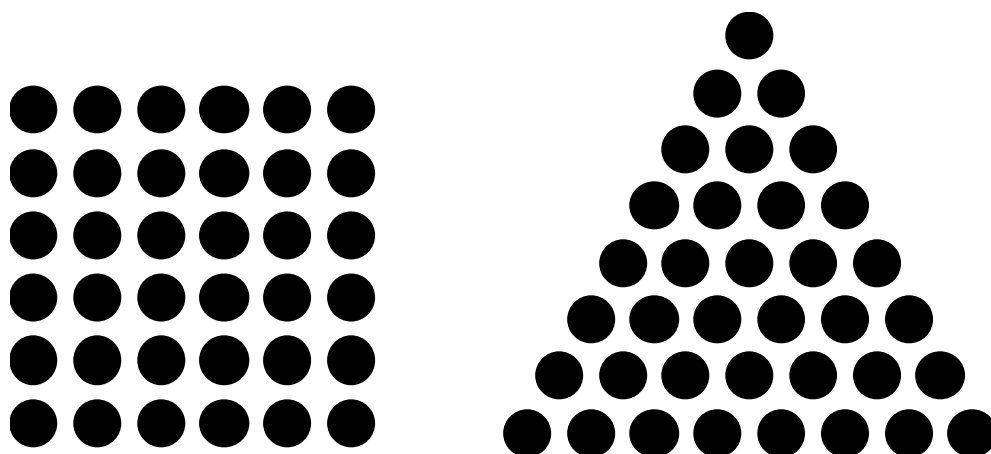


図1 36個の点が正方形や正三角形に並ぶ様子

36個の点を、図1のように正方形と正三角形の2通りの形に並べることができます。

- (1) このような並べ方ができる数を、1と36以外に見つけなさい。
- (2) このような並べ方ができる数のうち、小さいほうから n 番目の数を
 n の式で表しなさい。

解説

以前に出した問題を少しわかりやすくしたものです。(2016年12月の問題)前に出したときよりは簡単になっていますが、解けたでしょうか。

四角形に並べることのできる数を「四角数」または「平方数」、三角形に並べることのできる数を「三角数」といい、

四角数 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, ...

三角数 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55, ...

が該当します。 n 番目の四角数を S_n , m 番目の三角数を T_m とすると

$$S_n = n^2, \quad T_m = \frac{1}{2}m(m+1)$$

になります。今回の問題は

$$n^2 = \frac{1}{2}m(m+1)$$

となる自然数 n , m の組を探せばいいのですね。

(1)は、地道に探していくことにしましょう。Excelなどでこの解を求めると下のようになります。

n の値 (a_k とする)	m (b_k とする)	S_n と T_m
1	1	1
6	8	36
35	49	1225
204	288	41616
1189	1681	1413721
6930	9800	48024900
40391	57121	1631432881
235416	332928	55420693056

というわけで(1)が解けました。

この表に現れる数列をそれぞれ $\{a_k\}$, $\{b_k\}$ としましょう。すると

$\{a_k\}$: 1, 6, 35, 204, 1189, 6930, 40391, 235416 ...

$\{b_k\}$: 1, 8, 49, 288, 1681, 9800, 57121, 332928 ...

となります。この数列にどんな規則性を見つけられるでしょうか？

多くの人がはじめにみつけるのは、数列 $\{b_k\}$ が「四角数」または「四角数 - 1」になっていることではないでしょうか。つまり

$$\begin{aligned} 1 &= 1^2 \\ 8 &= 3^2 - 1 \\ 49 &= 7^2 \\ 288 &= 17^2 - 1 \\ 1681 &= 41^2 \end{aligned}$$

のようになっています。さらに、「四角数」と「四角数 - 1」が交互に現れていますね。
 そしてここに出てくる数 1, 3, 7, 17, 41, ... は a_k の約数になっています。表にまとめるとこうなります。

a_k		b_k	
1	1×1	1	1^2
6	2×3	8	$3^2 - 1$
35	5×7	49	7^2
204	12×17	288	$17^2 - 1$
1189	29×41	1681	41^2
6930	70×99	9800	$99^2 - 1$
40391	169×239	57121	239^2
235416	408×577	332928	$577^2 - 1$

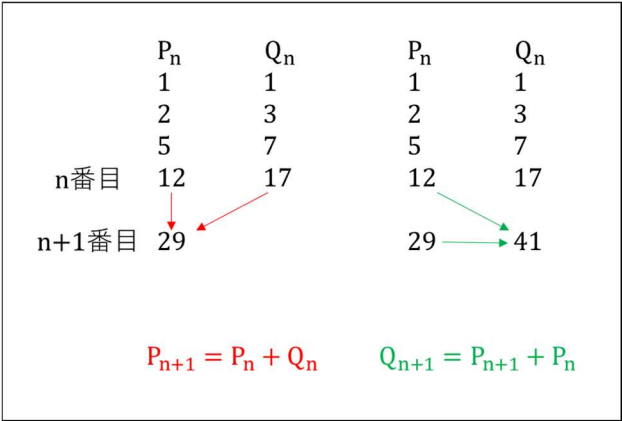
左側を $\{P_k\}$ とする

右側を $\{Q_k\}$ とする

以降は、本校卒業生の高嶋くんの解答¹にしたがって進めます。この表の左側の数字を $\{P_k\}$ 、右側の数字を $\{Q_k\}$ とすると次の法則が見つかります。

$$\begin{aligned} P_{n+1} &= P_n + Q_n \\ Q_{n+1} &= P_{n+1} + P_n \end{aligned}$$

これは数学 B で学習する漸化式というもので、これを解くことで



$$\begin{aligned} P_n &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \left\{ (1 + \sqrt{2})^n - (1 - \sqrt{2})^n \right\} \\ Q_n &= \frac{1}{2} \left\{ (1 + \sqrt{2})^n + (1 - \sqrt{2})^n \right\} \end{aligned}$$

¹ 2016 年 12 月に提出されたもの

が得られます。

求める数 1, 36, 1225, 41616, ...を「平方三角数」と呼びます。n 番目の平方三角数は $(P_n Q_n)^2$ ですから

$$\frac{1}{32} \left\{ (3 + 2\sqrt{2})^n - (3 - 2\sqrt{2})^n \right\}^2$$

あるいは、少し整理して

$$\frac{1}{32} \left\{ (17 + 12\sqrt{2})^n + (17 - 12\sqrt{2})^n - 2 \right\}$$

となりました。

実際に $n=1$ や $n=2$ を代入してみると、たしかに 1 や 36 が出てきますよね。

さて、これで n 番目の平方三角数を手にする式が完成したように見えますが、この式で出てくる数のほかにも平方三角数が存在するかもしれないですね。

ところが実際には上記の数が全てです。元の式は

$$n^2 = \frac{1}{2} m(m+1)$$

$$2n^2 = \left(m + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$$

$$8n^2 = (2m+1)^2 - 1$$

と変形できるから、 $2m+1 = x$, $2n = y$ とおけば

$$x^2 - 2y^2 = 1$$

で、これはペル方程式と呼ばれるものであり、この解法は広く知られていますから調べてみてください。