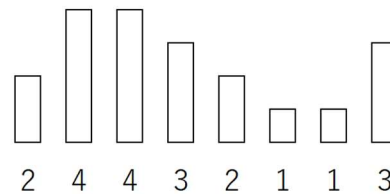


先月の解答・解説

2020 年 10 月の問題

ある直線状の通りに、1 から n までの高さのビルを 2 棟ずつ建てることにしました。
下の例は、どちらも $n=4$ の場合です。



市長である Aさんは、ビルの建てかたが次のような性質を満たすようにしたいです。

性質：同じ高さのビルの屋上に立つ 2 人が、お互いの姿を見ることができる。

例 1 では、どの高さのビルの屋上に立っても、お互いの姿を見ることができます。

しかし例 2 では、高さ 2 のビルの上に立つと、高さ 4 や高さ 3 のビルが邪魔をしてお互いの姿を見ることができません。（他の高さのビルなら OK）

$n=2$ のとき、このようなビルの建て方は「1122」「2211」「2112」の 3 通りがあります。

- (1) $n=3$ のとき、このようなビルの建て方は何通りありますか。
- (2) $n=4$ のとき、このようなビルの建て方は何通りありますか。
- (3) このようなビルの建て方が何通りあるか、 n の式で表してください。
- (4) 【チャレンジ問題】
ビルを 3 棟ずつ建てる場合はどうなるりますか。

解説

「オイラー数」について調べていたら、こんな問題にたどり着きました。

並べ方についての問題は、京都の数学コンテストでも出題されたことがあります。

1 から 2013 までの番号が 1 つずつ書かれた 2013 枚のカードを、以下の条件(a)を満たすように横 1 列に並べる。このとき、考えられる並べ方は全部で何通りか答えなさい。

条件(a)：どのカードに注目しても、そのカードより左にある「そのカードより番号の小さいカード」が 25 枚より少ない。

(京都数学コンテスト 2013)

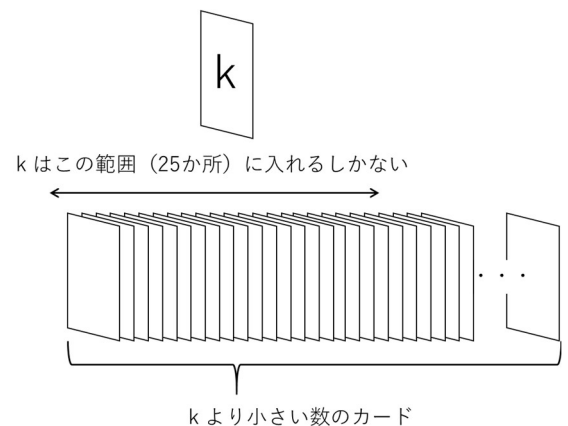
この問題は、次のように解くことができます。

- ① まず、1 から 25 までのカードを並べる。(25! 通り)
- ② 以降、26, 27, 28, 29, ... のカードを、小さい数から順に挟んでいく。このとき挟める場所は 25 か所。

(右の図を参照)

- ③ したがって並べ方の総数は

$$25! \times (25 \times 25 \times \dots \times 25) = 25! \times 25^{1988} \text{ 通り}$$



この問題はカードを順に挟んでいくことをイメージして解きましたが、同様に今月の問題をビルを挟んでいくイメージで解いてみましょう。

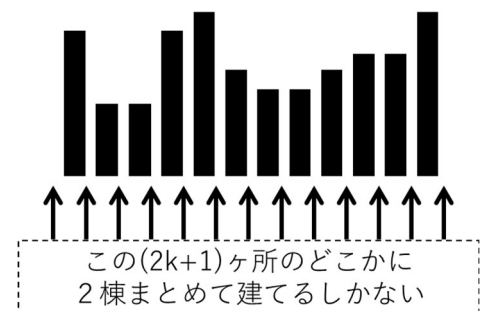
ポイントは、1, 2, 3, ... の順に考えるのではなく $n, n-1, n-2, \dots$ の順に考えることです。

- ① まず高さ n のビルを 2 棟たてる。この建て方は 1 通り。
- ② 次に高さ $n-1$ のビルを 2 棟建てる。
このときビルを建てる場所は「左」「中央」「右」の 3 か所があるが、
2 棟を別の場所に建てる条件を満たさないため、1 か所に 2 つを建てる。建て方は 3 通り
- ③ 同様に高さ $n-2, n-3, \dots$ のビルを建てていく。

高さ $n-k$ のビルを建てる時、すでに $2k$ 棟のビルが建っており、
新しいビルは (高さが最も低いので) 建て方は $2k+1$ 通り。

- ④ ①②③から、ビルの建て方は

$$1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n-1) \text{ 通り}$$



というわけで、(3)の答えは「 $1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n-1)$ 通り」だとわかりました。
よって(1)は 15 通り、(2)は 105 通りです。

$1 \times 3 \times \dots \times (2n-1)$ という書き方では気持ちが悪いという人は、 $\frac{(2n)!}{2^n \times n!}$ 通りという書き方もあります（これが
 $1 \times 3 \times \dots \times (2n-1)$ と等しいことは、自分で確かめてください）。

また二重階乗という表現もあり、これを使えば(3)の答えは $(2n-1)!!$ と書くことができます。便利な表現なので覚えておいて損はありません。

(4)についてもまったく同様であり、3 棟のビルをまとめて建てる必要があるので答えは

$$1 \times 4 \times 7 \times \dots \times (3n-2) \text{ 通り}$$

です。これについても $(3n-2)!!!$ や $(3n-2)!_3$ という表し方があります。

さて、(3)はスターリング順列と呼ばれるものとほぼ同じ¹です。ここから第二種スターリング数というのが出てくるのですが、これに関する類題を出してみます。

n 棟のビルが、条件にしたがって建っている。（この建て方は $(2n-1)!!$ 通りある。）

このとき、「左隣より高いビル」の数を a とする。

たとえばビルが 332211 と建っている場合は $a=0$,

ビルが 211233 と建っている場合は $a=2$,

ビルが 332112 と建っている場合は $a=1$ である。

$a=1$ となる建て方は何通りあるか。n の式で表せ。

考えてみてください。答えは単純な値になります。

¹ (3)の大小関係を逆転させたものがスターリング順列。つまり 133122 のように、「大きい数字のビルの間に小さい数字のビルが入らない」ようにしたもの。