

先月の解答・解説

2020 年 9 月の問題

1つの立方体を、いくつかの小さい立方体に分割することを考えます。

たとえば 図1 のようにすれば 8 個の小さい立方体に、

図2 のようにすれば 20 個の小さい立方体に分割できます。

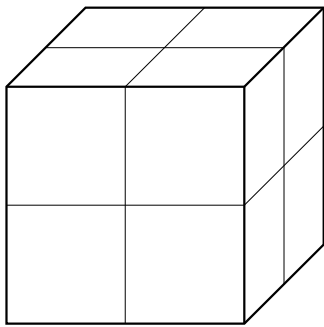


図1

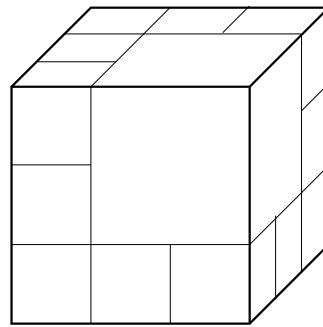


図2

- (1) 立方体を 15 個の小さい立方体に分割する方法を考えてください。
- (2) 立方体を 39 個の小さい立方体に分割する方法を考えてください。
- (3) 立方体を 7 個の小さい立方体に分割することはできません。

これを証明してください。

- (4) 【チャレンジ問題】

立方体を 48, 49, 50, 51, 52, ... 個の小さい立方体に分割することができます。

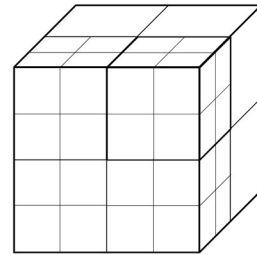
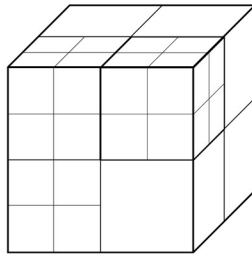
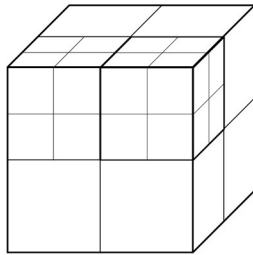
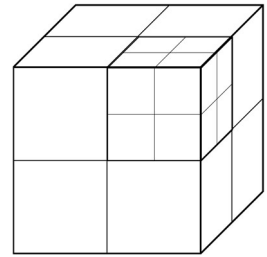
これを証明してください。

解説

少し複雑だったかもしれません。

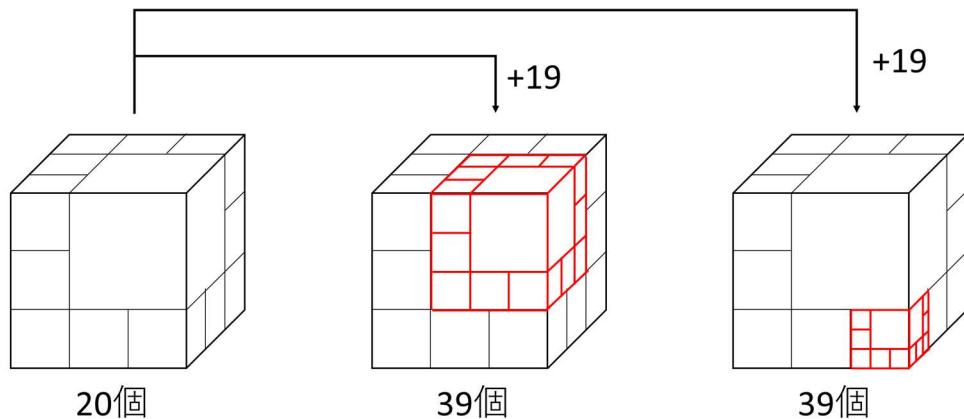
問1については、多くの人が解けたのではないのでしょうか。

1つの立方体を8分割することで立方体の個数は+7されるので、たとえば右のようにすれば15分割をすることができます。

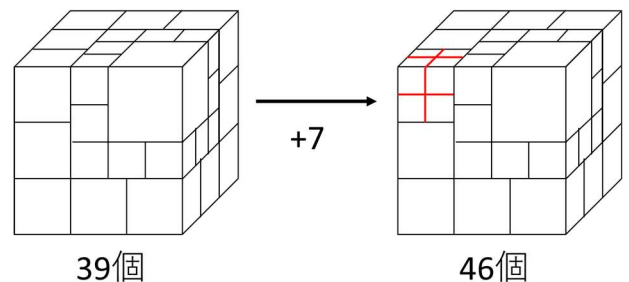


同じことを繰り返せば、22分割、29分割、36分割…が可能です。この図では大きい立方体（最初の1/2のサイズ）ばかりを分割していますが、どんな立方体でも分割できるので $(7n+1)$ 分割が可能だと示せました。

同様に問2について、例えば図のようにすれば39分割が可能です。20分割、39分割、58分割、77分割、…と、つまり $(19n+1)$ 分割が可能なのですね。



ほかに、39分割したものを+7するなど様々なことが可能で、 n が（1から始めて）「+7」と「+19」で作られる数の場合に n 分割が可能ということがわかりました。



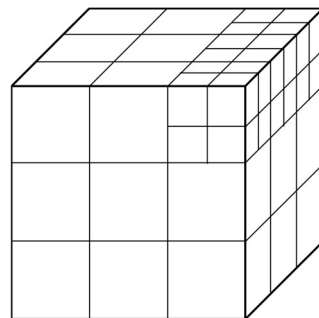
さて、問3より前に問4をやってみます。

「+7」の繰り返しで様々な分割ができることがわかったので、

「48, 49, 50, 51, 52, 53, 54 分割が可能」

であることを示せばいいですね。

48 分割については、 $27+7+7+7$ が 48 となることを考えれば、図のような分割を思いつきます。よって 48, 55, 62, … 分割が可能になりました。

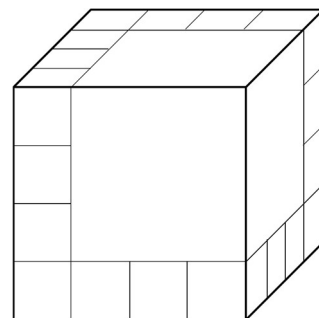


50 分割は、「15 分割、22 分割…」と続けていくと可能です。

53 分割も「39 分割、46 分割、53 分割…」が可能なので OK です。

残りの 49, 51, 52, 54 分割について一番簡単なのは 52 分割です。

右のようにすれば 38 分割が可能で、ここから +7 を 2 回繰り返すことによって 52 分割ができます。

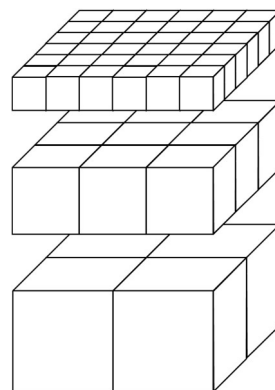


残りの 3 つは見つけるのが非常に難しいので、以下の式を見てみましょう。

- ① $6^3 = 4 \times 3^3 + 9 \times 2^3 + 36 \times 1^3$ (49 分割)
- ② $6^3 = 5 \times 3^3 + 5 \times 2^3 + 41 \times 1^3$ (51 分割)
- ③ $8^3 = 6 \times 4^3 + 2 \times 3^3 + 4 \times 2^3 + 42 \times 1^3$ (54 分割)

①は、一辺 6 の立方体を「一辺 3 の立方体 4 個、一辺 2 の立方体 9 個、一辺 1 の立方体 36 個」に分割できる可能性を示しています。実際のところ図のように分割できるので、49 分割が可能と分かりました。

②と③についても、右辺に書いてある通りの個数に分割可能なことを手作業で確認できるので（試してみてください）、51 分割と 54 分割について解決しました。



これで49個

以上から、 $n \geq 48$ の場合に n 分割が可能であることがわかりました。

最後に問 3 についてです。これについては、小学 6 年生の青山君の証明を引用します。

「立方体 ABCD-EFGH から頂点 A を含む立方体を取り出すとき、その立方体は頂点 A だけを含むか全ての頂点を含むかしかない。またこのことは全ての頂点において言える。よって、すべての頂点を含む場合の 1 個に分割した場合を除いて、8 個以上に分割する必要がある、7 個には分割不可能である。」

きれいな証明ですね。分割可能な個数は 1, 8, 15, 20, 22, 27, 29, 34, 36, 38, 39, 41, 43, 45, 46, 48 とそれ以上とされているのですが、これ以外の個数に分割が不可能であることは示すのが難しく、特に 47 個に分割が不可能であることは Hadwiger 問題¹と呼ばれ 50 年近く考えられてきたようです。

2~7 個に分割が不可能であることは問 3 で証明できたので、ぜひ 9 個や 10 個に分割が不可能なことを証明してみてください。

¹ <https://mathworld.wolfram.com/HadwigerProblem.html> が詳しい。