先月の解答・解説

2020 年 8 月の問題

「4 と 5」には、次のような関係があります。

$$\frac{2}{4} = 0.5 \qquad \frac{2}{5} = 0.4$$

また、「24 と 25」には次のような関係があります。

$$\frac{6}{24} = 0.25 \qquad \frac{6}{25} = 0.24$$

これをふまえて、次の問いに答えなさい。

(1)　同様の関係が「75 と 76」「624 と 625」にも成り立ちます。この 2 組のペアについて、問題文の式①，②のような関係式を作りなさい。分子は自分で探すこと。

(2)　「n と n+1」で同様の関係が見つかるものを探しなさい。

n が 1 桁の範囲にあと 1 つ、n が 3 桁の範囲にさらに 1 つあります。

(3)　「n と n+3」で同様の関係が見つかるものを探しなさい。

解説

　2 月 4 日や 6 月 24 日、7 月 25 日によく授業で出題している問題です。
　2015 年の洛北算額[1]でも、ほぼ同じ問題を出題しました。実際、

$$\frac{2}{4} = 0.5\ , \qquad \frac{2}{5} = 0.4$$

$$\frac{6}{24} = 0.25, \qquad \frac{6}{25} = 0.24$$

$$\frac{7}{25} = 0.28, \qquad \frac{7}{28} = 0.25$$

という式が成り立ちます。

(1)　分子を x とすると

$$\frac{x}{75} = 0.76, \qquad \frac{x}{76} = 0.75$$

となるはずで、ここから計算すると$x = 57$になります。よって

$$\frac{57}{75} = 0.76, \qquad \frac{57}{76} = 0.75$$

という関係が得られました。同様に

$$\frac{390}{624} = 0.625, \qquad \frac{390}{625} = 0.624$$

も発見することができます。

(2)　この問題にはいつもより多くの皆さんが取り組んでくれました。校外のみなさんも多かったです。

　どのように解けばよいでしょうか。1 桁の範囲に 1 組、3 桁の範囲にもう 1 組あるということを言いましたので、 1 桁で探してみると

$$\frac{3}{5} = 0.6, \qquad \frac{3}{6} = 0.5$$

はすぐ見つかります。

---

[1] 洛北高校の Web ページには載っていませんが、洛北算額は 2015 年から始めています。

3 桁のものはどうやって探せばいいでしょう。いままでのものを詳しく見直してみます。

式①からは

$$4 \times 5 = 20$$

式②からは

$$24 \times 25 = 600$$

が得られ、式①と式②の分子を見比べると

$$\boxed{n(n+1)\ \text{が}\ 10^{\mathrm{k}}\ \text{の倍数である}}$$

ことが必要と気づいたのではないでしょうか。（ k は自然数 ）
(2)はこのような n を探す問題になっていました。似たような問題は東京大学でも

3 以上 9999 以下の奇数 a で、 $a^2 - a$ が 10000 で割り切れるものをすべて求めよ。

という形で出題されています（2005 年）。$a = n + 1$ とおけば $\mathrm{a}^2 - \mathrm{a} = n(n+1)$ ですから、これは今考えている問題の$k = 4$の場合ですね。

さて、3 桁の n を探してみましょう。

$n(n+1)$が 1000 の倍数のとき、$n(n+1)$は 8 の倍数でもあります。ここで n と $n+1$ のうち片方だけしか偶数にならないので、どちらかは 8 の倍数であることが必要です。

同様に$n(n+1)$は 125 の倍数で、 n と $n+1$ のうち片方だけしか 5 の倍数にならないので、どちらかは 125 の倍数となります。したがって

$$\begin{cases} \mathrm{n}\ \text{が 8 の倍数 かつ}\ \mathrm{n}+1\ \text{が 125 の倍数} & \ldots(\mathrm{A}) \\ \text{または} & \\ \mathrm{n}\ \text{が 125 の倍数 かつ}\ \mathrm{n}+1\ \text{が 8 の倍数} & \ldots(\mathrm{B}) \end{cases}$$

の 2 つの場合[2]を考えれば良いことになりますね。

(A)の場合、n+1 が 125 の倍数になるのは

$$(\mathrm{n}, \mathrm{n}+1) = (124,125), (249,250), (374,375), (499,500), (624,625), (749,750), (874,875)$$

(B)の場合、n が 125 の倍数になるのは

$$(\mathrm{n}, \mathrm{n}+1) = (125,126), (250,251), (375,376), (500,501), (625,626), (750,751), (875,876)$$

の合計 14 個で、この候補の中から「125 の倍数でないほうが 8 の倍数になっている」ペアを探せば

$$(\mathrm{n}, \mathrm{n}+1) = (375,376), (624,625)$$

をみつけられます。

したがって探していた関係式は

[2] n が 3 桁なので、「n が 8 の倍数かつ 125 の倍数」のようなケースは存在しない。

$$\frac{141}{375}=0.376,\qquad \frac{141}{376}=0.375$$

となりました。

(3)

　これも全く同様で、

$$\begin{cases} \mathrm{n}\text{ が}2^k\text{の倍数 かつ }\mathrm{n}+3\text{ が}5^k\text{の倍数} & \dots(\mathrm{C}) \\ \text{または} & \\ \mathrm{n}\text{ が}5^k\text{の倍数 かつ }\mathrm{n}+3\text{ が}2^k\text{の倍数} & \dots(\mathrm{D}) \end{cases}$$

の場合を考えればよいです。

たとえば$k=3$とすると、

(C)の場合、n+3 が 125 の倍数になるのは

$$(\mathrm{n},\mathrm{n}+3)=(122,125),(247,250),(372,375),(497,500),(622,625),(747,750),(872,875)$$

(D)の場合は n が 125 の倍数になるのは

$$(\mathrm{n},\mathrm{n}+3)=(125,128),(250,253),(375,378),(500,503),(625,628),(750,753),(875,878)$$

の合計 14 組なので、検証して

$$(\mathrm{n},\mathrm{n}+3)=(125,128),(872,875)$$

の 2 つをみつけることができます。

　同様に 1 桁、 2 桁、 4 桁などの場合を考えれば

$$\frac{1}{2}=0.5\ ,\qquad \frac{1}{5}=0.2 \qquad\qquad \frac{4}{5}=0.8,\qquad \frac{4}{8}=0.5$$

$$\frac{54}{72}=0.75,\qquad \frac{54}{75}=0.72 \qquad\qquad \frac{7}{25}=0.28,\qquad \frac{7}{28}=0.25$$

$$\frac{763}{872}=0.875,\qquad \frac{763}{875}=0.872 \qquad\qquad \frac{16}{125}=0.128,\qquad \frac{16}{128}=0.125$$

$$\frac{351}{1872}=0.1875,\qquad \frac{351}{1875}=0.1872 \qquad\qquad \frac{6604}{8125}=0.8128,\qquad \frac{6604}{8128}=0.8125$$

という関係式をみつけられました。

さて、(2)(3)について 5 桁、6 桁、… の場合も探してみたいのですが、探す候補の数が 5 桁では 56 個、6 桁では 114 個…と指数関数的にふくれあがります。

たとえば n が 10 桁のときに n が$2^{10}(=1024)$の倍数、$\mathrm{n}+1$が$5^{10}(=9765625)$の倍数になっている$(\mathrm{n},\mathrm{n}+1)$の組を探してみましょう。

今までのように手作業で探す場合、n が5^{10}の倍数になるような組が 921 個あり、それぞれの候補について n+1 が2^{10}の倍数になっているかチェックするのは簡単ではありません。

これを回避する方法はいくつかあり、数学 A の「整数」分野の考え方を使えば

$$\mathrm{n}=9765625\mathrm{a}$$
$$\mathrm{n}+1=1024\mathrm{b}$$

とできるので（a,bは自然数）、ここから$a=-x,\ b=y$とおくことで

$$9765625x+1024y=1$$

となる整数x,yをみつける問題に帰着します。数学 A のユークリッドの互除法を用いることで

$$x=-183,\qquad y=1745224$$

をみつけることができます[3]。ここから

$$(\mathrm{n},\mathrm{n}+1)=(1787109375,1787109376)$$

すなわち

$$\frac{319375992}{1787109375}=0.1787109376,\qquad \frac{319375992}{1787109376}=0.1787109375$$

という関係式をみつけることができました。さきほど紹介した入試問題も、問題集や予備校の解説を見る限りこれと同様の方法で解いているものばかりでした。

実は、他の方法もあります。(2)の条件を満たす分数を桁ごとに列挙すると

$$\frac{2}{4}\ と\ \frac{2}{5} \qquad \frac{3}{5}\ と\ \frac{3}{6}$$

$$\frac{6}{24}\ と\ \frac{6}{25} \qquad \frac{57}{75}\ と\ \frac{57}{76}$$

$$\frac{390}{624}\ と\ \frac{390}{625} \qquad \frac{141}{375}\ と\ \frac{141}{376}$$

$$\frac{39}{0624}\ と\ \frac{39}{0625} \qquad \frac{8790}{9375}\ と\ \frac{8790}{9376}$$

[3] n が 10 桁の範囲では x, y の組がこの 1 つしか存在しないことも、不等式を用いて示せます（数学 A の内容）。

$$\frac{82128}{90624} \text{ と } \frac{82128}{90625}$$

$$\frac{793212}{890624} \text{ と } \frac{793212}{890625}$$

$$\frac{835571}{2890624} \text{ と } \frac{835571}{2890625}$$

$$\vdots$$

$$\frac{879}{09375} \text{ と } \frac{879}{09376}$$

$$\frac{11963}{109375} \text{ と } \frac{11963}{109376}$$

$$\frac{5054322}{7109375} \text{ と } \frac{5054322}{7109376}$$

$$\vdots$$

となりますね。ここで、最初の桁が 0 である数も含めました。

ここで、各ペアの左側の分数

$$\frac{2}{4}, \frac{6}{24}, \frac{390}{624}, \frac{39}{0624}, \frac{82128}{90624}, \frac{793212}{890624}, \cdots$$

$$\frac{3}{5}, \frac{57}{75}, \frac{141}{375}, \frac{8790}{9375}, \frac{879}{09375}, \frac{11963}{109375}, \cdots$$

の分母に注目すると、上の列では分子の末尾を先頭につけることで列の続きを作ることができます。

$$\frac{82128}{90624} \qquad \frac{793212}{890624}$$

下の列については分子の末尾の 9 倍を考えればいいです。回答を送ってくれた小学生の中にこれを考えついた人がいました（素晴らしいです）。

さて、実は上の列と下の列の分母には下のような関係もあります。

$$4 + 5 = 9$$
$$24 + 75 = 99$$
$$624 + 375 = 999$$
$$0624 + 9375 = 9999$$
$$\vdots$$

ここから、片方がわかればもう片方も分かるようになっています（これは(3)でも同様です。）

色々面白い性質が出てきましたが、これはこの問題が

$$n^2 \equiv -n \pmod{10^k}$$

という mod10^kでの方程式を解くことと等価なので、これを手がかりに調べてみてください。「天に向かって続く数」（加藤文元，中井保行，2016 年、日本評論社）という本がおすすめです。