

先月の解答・解説

2019 年 5 月の問題

$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$ のように分子が 1 である分数をエジプト分数または単位分数といい、古代エジプトではエジプト分数のみを用いて数を表していました(※)。

例えば $\frac{2}{5}$ は $\frac{1}{3} + \frac{1}{15}$ のように、また $\frac{3}{5}$ は $\frac{1}{2} + \frac{1}{10}$ のように表します。
ここで、 $\frac{2}{5}$ を $\frac{1}{5} + \frac{1}{5}$ のように 同じ分数を 2 つ以上使うことはありません。

- (1) $\frac{5}{2019}$ を、エジプト分数の和のみで表してください。

同じ分数を 2 つ以上用いてはいけません。

- (2) 2 は整数ですが、これもエジプト分数の和で

$$2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{42} + \frac{1}{72}$$

のように表せます。

3, 4, 5 を同じ分数を 2 つ以上用いずに表してください。

- (3) 【チャレンジ問題】

すべての有理数は異なるエジプト分数の和で表せることを示しなさい。

※実際には $\frac{2}{3}$ も特別な数として用いていました。

解説

有名な問題です。解き方もいろいろあるので、興味がある人は自分で調べるとよいと思います。
文字数の関係で「エジプト分数」のことを「単位分数」と呼ぶことにします。

(1) 貪欲法とよばれる方法で求めてみましょう。

まず、 $\frac{5}{2019}$ に最も近い単位分数を探します。これは簡単で、2019を5で割るとよいです。

$2019 \div 5 = 403.8$ ですから $\frac{5}{2019} = \frac{1}{403.8}$ なので、 $\frac{1}{404} < \frac{5}{2019} < \frac{1}{403}$ です。

よって、

$$\frac{5}{2019} = \frac{1}{404} + (\text{あまり})$$

と考えられます。「あまり」の部分を計算するとなんと $\frac{1}{815676}$ で、単位分数でした。したがって

$$\frac{5}{2019} = \frac{1}{404} + \frac{1}{815676}$$

となり、いきなり答えを得ることができました。

この問題は簡単すぎたので、別な例も考えてみましょう。 $\frac{607}{1000}$ を単位分数の和で表してみます。

$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$ のうち、最も $\frac{607}{1000}$ に近いのは $\frac{1}{2}$ なので

$$\frac{607}{1000} = \frac{1}{2} + \frac{107}{1000}$$

$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$ のうち、最も $\frac{107}{1000}$ に近いのは $\frac{1}{10}$ なので

$$\frac{607}{1000} = \frac{1}{2} + \frac{1}{10} + \frac{7}{1000}$$

$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$ のうち、最も $\frac{7}{1000}$ に近いのは $\frac{1}{143}$ なので

$$\frac{607}{1000} = \frac{1}{2} + \frac{1}{10} + \frac{1}{143} + \frac{1}{143000}$$

このように、できるだけ大きい分数を引き算していくことで求められます。

ちなみに $\frac{7}{1000}$ は $\frac{1}{143} + \frac{1}{143000}$ と分解するほかに $\frac{1}{200} + \frac{1}{500}$ と分解する方法もあり、分解の方法が1通りではないことがわかります。

(2)

では、整数を分解してみましょう。単に単位分数に分解するだけなら

$$2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

となり、とても簡単です。

しかし、同じ分数を2つ使ってはいけないので、

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}, \quad \frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}, \quad \frac{1}{2} = \frac{1}{5} + \frac{3}{10}$$

のように $\frac{1}{2}$ をさらに分解することになります。これで

$$2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{3}{10}$$

です。この後、 $\frac{1}{4}$ や $\frac{3}{10}$ をさらに分解すれば完成です。同じ分数を使わないように注意すると

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{7} + \frac{3}{28} = \frac{1}{7} + \frac{1}{14} + \frac{1}{28}, \quad \frac{3}{10} = \frac{1}{8} + \frac{7}{40} = \frac{1}{8} + \frac{1}{10} + \frac{1}{20} + \frac{1}{40}$$

のような分解が思いつきますから、これを用いて

$$2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{10} + \frac{1}{14} + \frac{1}{20} + \frac{1}{28} + \frac{1}{40}$$

となります。

これは問題文に書いてある分解の方法とは異なります。ほかにも色々と探してみてください。

さて、同様にいろいろと試してみましょう。 $\frac{1}{n}$ を分解する方法はたくさんあるので、今回は

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n(n+1)}$$

$$\begin{aligned} 3 = & \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16} + \frac{1}{20} + \frac{1}{21} + \frac{1}{22} + \frac{1}{30} + \frac{1}{31} + \frac{1}{42} + \frac{1}{43} + \frac{1}{44} + \frac{1}{45} + \frac{1}{46} + \frac{1}{47} \\ & + \frac{1}{56} + \frac{1}{57} + \frac{1}{58} + \frac{1}{59} + \frac{1}{60} + \frac{1}{72} + \frac{1}{73} + \frac{1}{74} + \frac{1}{75} + \frac{1}{90} + \frac{1}{91} + \frac{1}{92} + \frac{1}{110} + \frac{1}{111} + \frac{1}{132} + \frac{1}{156} + \frac{1}{157} + \frac{1}{158} + \frac{1}{159} + \frac{1}{182} + \frac{1}{183} + \frac{1}{184} \\ & + \frac{1}{210} + \frac{1}{211} + \frac{1}{240} + \frac{1}{420} + \frac{1}{421} + \frac{1}{462} + \frac{1}{930} + \frac{1}{1806} + \frac{1}{1807} + \frac{1}{1808} + \frac{1}{1809} + \frac{1}{1810} + \frac{1}{1892} + \frac{1}{1893} + \frac{1}{1894} + \frac{1}{1895} + \frac{1}{1980} + \frac{1}{1981} + \frac{1}{1982} \\ & + \frac{1}{2070} + \frac{1}{2071} + \frac{1}{2162} + \frac{1}{3192} + \frac{1}{3193} + \frac{1}{3194} + \frac{1}{3195} + \frac{1}{3306} + \frac{1}{3307} + \frac{1}{3308} + \frac{1}{3422} + \frac{1}{3423} + \frac{1}{3540} + \frac{1}{5256} + \frac{1}{5257} + \frac{1}{5258} + \frac{1}{5402} + \frac{1}{5403} \\ & + \frac{1}{5550} + \frac{1}{8190} + \frac{1}{8191} + \frac{1}{8372} + \frac{1}{12210} + \frac{1}{24492} + \frac{1}{24493} + \frac{1}{24494} + \frac{1}{24806} + \frac{1}{24807} + \frac{1}{25122} + \frac{1}{33306} + \frac{1}{33307} + \frac{1}{33672} + \frac{1}{44310} + \frac{1}{176820} \\ & + \frac{1}{3263442} + \frac{1}{3263443} + \frac{1}{3263444} + \frac{1}{3263445} + \frac{1}{3267056} + \frac{1}{3267057} + \frac{1}{3267058} + \frac{1}{3270672} + \frac{1}{3270673} + \frac{1}{3274290} + \frac{1}{3581556} + \frac{1}{3581557} \\ & + \frac{1}{3581558} + \frac{1}{3585342} + \frac{1}{3585343} + \frac{1}{3589130} + \frac{1}{3922380} + \frac{1}{3922381} + \frac{1}{3926342} + \frac{1}{4286970} + \frac{1}{10192056} + \frac{1}{10192057} + \frac{1}{10192058} + \frac{1}{10198442} \\ & + \frac{1}{10198443} + \frac{1}{10204830} + \frac{1}{10932942} + \frac{1}{10932943} + \frac{1}{10939556} + \frac{1}{11713506} + \frac{1}{27630792} + \frac{1}{27630793} + \frac{1}{27641306} + \frac{1}{29187006} + \frac{1}{67084290} \\ & + \frac{1}{599882556} + \frac{1}{599882557} + \frac{1}{599931542} + \frac{1}{615362442} + \frac{1}{1109322942} + \frac{1}{10650056950806} + \frac{1}{10650056950807} + \frac{1}{10650056950808} \\ & + \frac{1}{10650063477692} + \frac{1}{10650063477693} + \frac{1}{10650070004580} + \frac{1}{10673658174192} + \frac{1}{10673658174193} + \frac{1}{10673664708306} + \frac{1}{10697298602256} \\ & + \frac{1}{12827546962692} + \frac{1}{12827546962693} + \frac{1}{12827554125806} + \frac{1}{12854680842306} + \frac{1}{15385068786780} + \frac{1}{103878015699192} + \frac{1}{103878015699193} \\ & + \frac{1}{103878036083306} + \frac{1}{104008229425806} + \frac{1}{119529231708306} + \frac{1}{763460694178056} + \frac{1}{359859081592975692} \\ & + \frac{1}{113423713055421844361000442} + \frac{1}{113423713055421844361000443} + \frac{1}{113423713055443144474902056} \\ & + \frac{1}{113423852078879667445124556} + \frac{1}{113926978819506372673027056} + \frac{1}{164545961080081581986849556} \\ & + \frac{1}{10790642145601683494645152056} + \frac{1}{12864938683278671740537145998360961546653259485195806} \end{aligned}$$

となり、確かに答はわかるのですが、手計算ではとうてい無理な結果になってしまいました。

もう少し「マシ」な方法として、 $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$ と、なるべく大きい分数だけ使ってできるだけ3に近づけてみましょう。すると、

$$3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{29} + \frac{1}{30} + (\text{あまり})$$

となり、(1)と同様に考えれば

$$3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{29} + \frac{1}{30} + \frac{1}{200} + \frac{1}{77706} + \frac{1}{16532869712} + \frac{1}{8016623675112373396075} \\ + \frac{1}{8657953569121363267761} + \frac{1}{14429922615202272112935}$$

と、はるかに短い結果が出てきました。

4, 5も同じようにできるのですが、ちょっと長くなるので割愛します。出題として不適切だったかもしれませんね。

(3)は、もう説明がいらないかもしれません。

すべての有理数は $\frac{1}{p} + \frac{1}{p} + \frac{1}{p} + \dots + \frac{1}{p}$ の形で表されるから、先ほどと同様に分解していけば良いです。

今回は手計算では難しい問題でしたが、理論的に考えると「できるはず」というのが見えてきたはずです。じっくり考えてみてください。