

先月の解答・解説

2019 年 4 月の問題

2 枚のガラス板を重ね、そこに光線を当てます。光線は図 1 のようにガラスの表面で何度かはね返り、ガラス板の外に出ます。

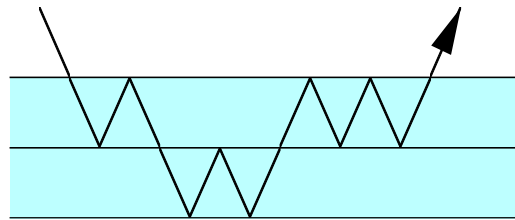


図 1

はね返る回数が 2 回のとき、光線の道筋は 3 パターンあります。

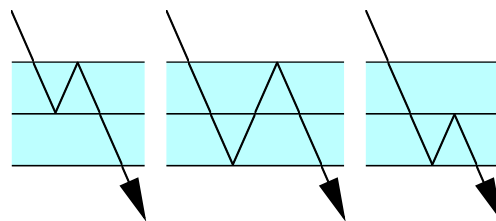


図 2

また、回数が 3 回のとき、光線の道筋は 5 パターンあります。

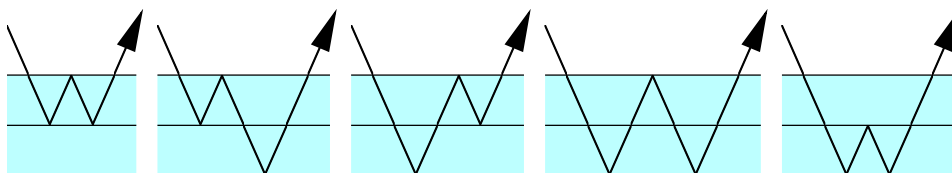


図 3

(1) はね返る回数が 10 回のとき、光線の道筋は何パターンありますか。

(2) 【チャレンジ問題】

板の枚数が 3 枚ではね返る回数が 10 回のとき、

光線の道筋は何パターンありますか。

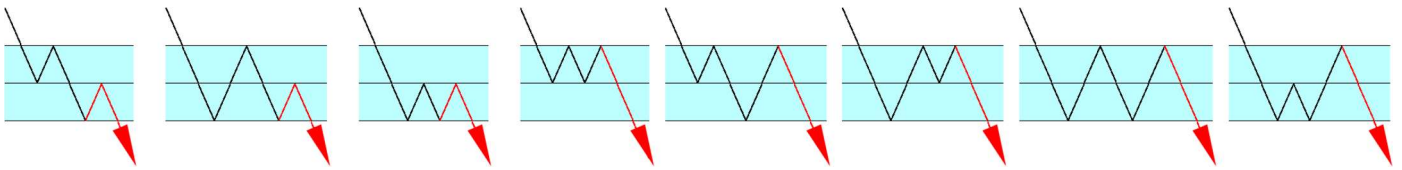
解説

(1) 実際に数えてみると、反射回数が0回、1回、2回、…のときのパターン数は

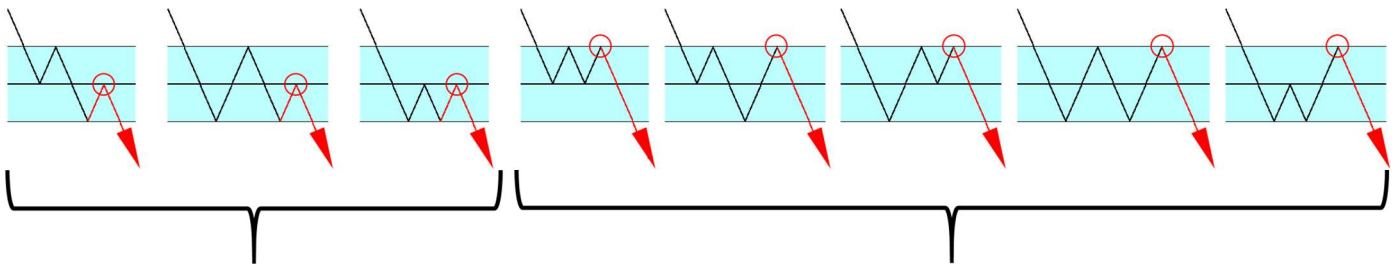
1, 2, 3, 5, 8, 13, …

となり、フィボナッチ数列が登場することがわかります。したがって答えは144回なのですが、これだけでは解答として心もとないので理由も考えてみましょう。

まず、4回反射する場合の図を8通り全て書いてみます。



次にこれを、図のように「最後に反射した位置」で2種類に分類します。



最後に中央で反射したもの (3通り)

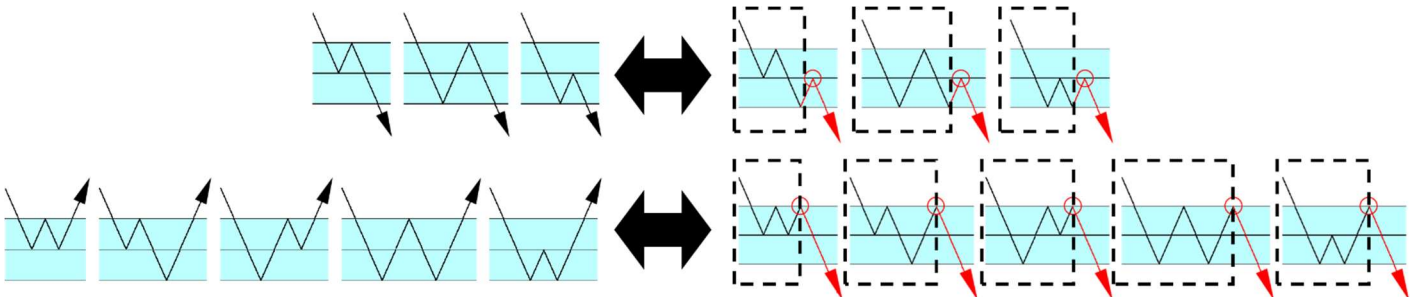
最後に表面で反射したもの (5通り)

すると、図のように

「中央で反射したもの」 $\leftrightarrow$ 「2回反射するときの全パターン」

「表面で反射したもの」 $\leftrightarrow$ 「3回反射するときの全パターン」

が対応することが見えてきます。



これは反射の回数が4回でなくても同じです。
つまり、反射回数がn回のときのパターン数を a_n としたとき

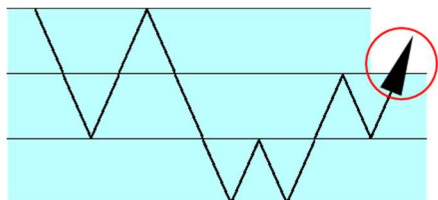
$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

が成り立つことがわかりました。これは数学Bで学習する「漸化式」といいます（フィボナッチ数列の漸化式です。）したがって順に代入していくと

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a_n	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144

(2) では、ガラス板の数が3枚だとどうなるでしょう。

これは難しいので、概要だけ説明します。まずn回反射したときのパターン数を a_n とし、そして光線の出口だけを少し変えたものを b_n とおきます。



光線の出口（だけ）が1枚手前のときの
パターン数を b_n とする

すると

$$\begin{cases} a_{n+2} = a_{n+1} + b_{n+1} + a_n \\ b_{n+1} = a_n + b_n \end{cases} \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

が成り立ち、ここから b_n を消去すると

$$a_{n+3} = 2a_{n+2} + a_{n+1} - a_n \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

となり、順に代入すると $a_{10} = 4004$ ですから、答えは 4004通り になりました。

ここまでくるとガラス板が4枚、5枚、… の場合も考えたくないのでいろいろ考えてみたのですが、板の枚数が一般のk枚の場合を系統的に考えるのは無理だったのでいろいろ調べてみました。

すると参考文献[1]や[2]が見つかったので、次のページにそこから引用した結果を書いておきます。

漸化式は、

ガラス板が 2 枚の時 $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$

ガラス板が 3 枚の時 $a_{n+3} = 2a_{n+2} + a_{n+1} - a_n$

ガラス板が 4 枚の時 $a_{n+4} = 2a_{n+3} + 3a_{n+2} - a_{n+1} - a_n$

ガラス板が 5 枚の時 $a_{n+5} = 3a_{n+4} + 3a_{n+3} - 4a_{n+2} - a_{n+1} + a_n$

ガラス板が 6 枚の時 $a_{n+6} = 3a_{n+5} + 6a_{n+4} - 4a_{n+3} - 5a_{n+2} + a_{n+1} + a_n$

理由はここで説明すると長くなるので、参考文献を読んでみてください。

参考文献

[1]

B. Junge and V. E. Hoggatt, Jr., Polynomials arising from reflections across multiple plates, Fib. Quart., 11 (1973), 285-291.

<https://www.fq.math.ca/Scanned/11-3/junge.pdf>

[2]

Emma L. L. Gao, Sergey Kitaev, Philip B. Zhang, Pattern-avoiding alternating words, preprint, 2015.

https://personal.cis.strath.ac.uk/sergey.kitaev/index_files/Papers/pat-av-alt-words.pdf