

先月の解答・解説

2019 年 2 月の問題

30° の角をなす 2 枚の鏡に光線を当てます。このとき、図 1 では光線が 5 回反射し、図 2 では光線が 4 回反射しました。

- (1) 2 枚の鏡のなす角が 30° のとき、光線は最大で何回反射しますか。
- (2) 2 枚の鏡のなす角が 20° のとき、光線は最大で何回反射しますか。
- (3) 2 枚の鏡のなす角が x° のとき、光線は最大で何回反射しますか。

図 1

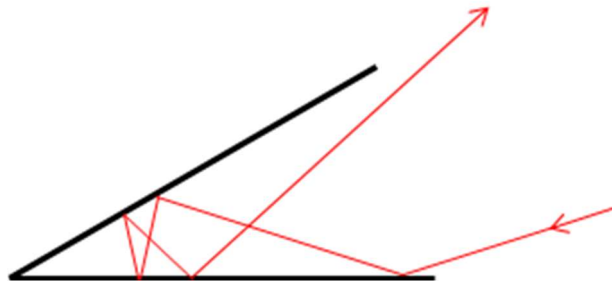
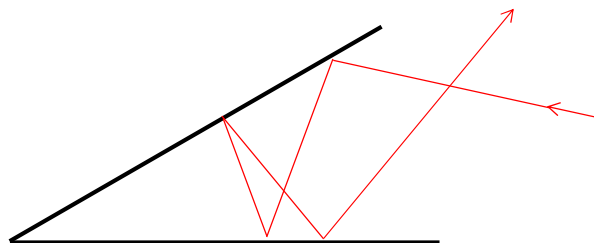


図 2

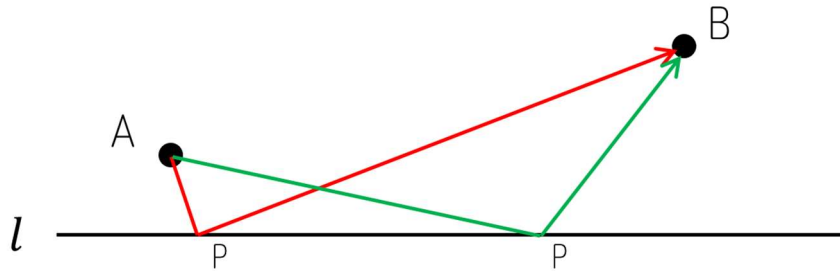


解説

「反射」や「折り返し」の問題には、ひとつのセオリーがあります。まずは、この問題を見てください。

例題

点Pは直線 l 上をうごく。AP+PBの長さが最小となるPの位置を求めよ。

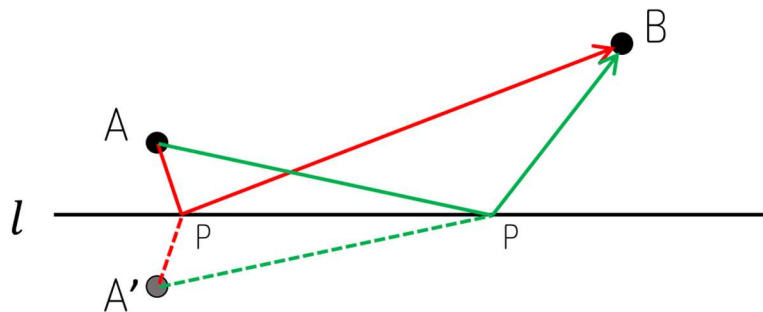


この問題は非常に有名なので、知っている人も多いと思います。解答は、こうです。

解答

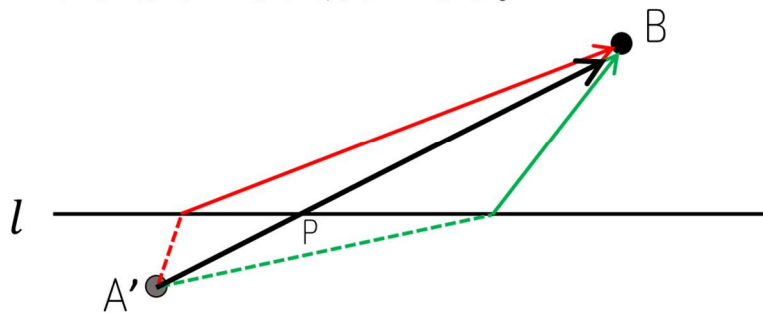
直線 l に関して点Aと対象な点A'をとる。

このとき、AP+PBの長さはA'P+PBの長さと等しい。

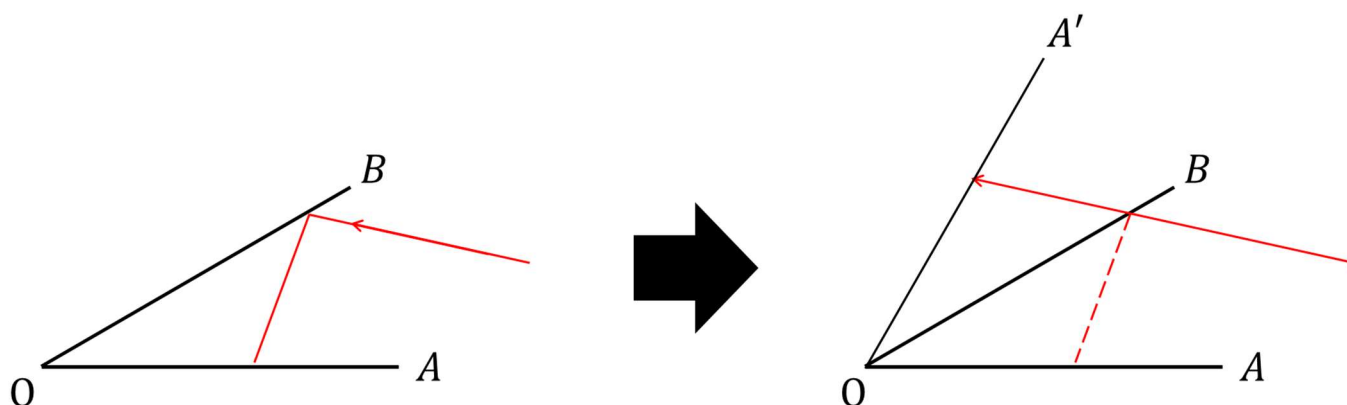


よってA'P+PBの長さが最小となる点を探せば良い。

つまり、Pが線分A'B上にあるときに最小となる。

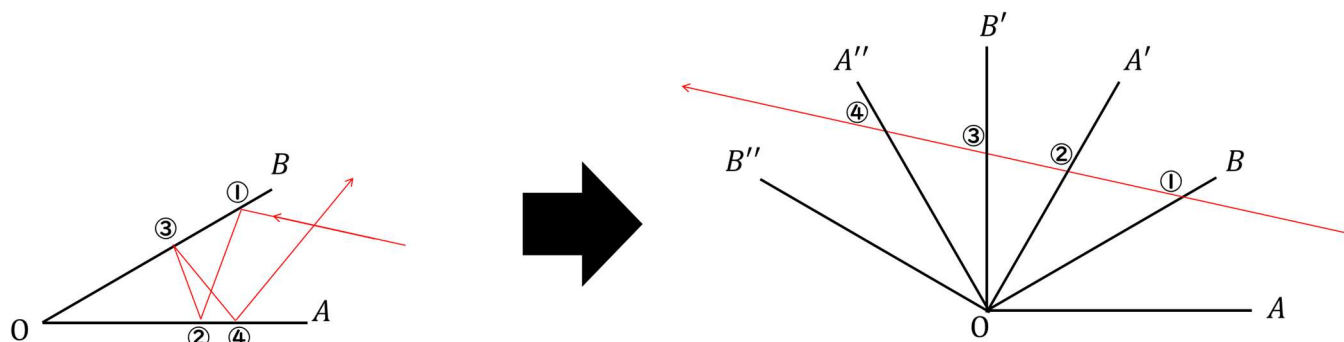


この手法の優れた点は、「折れ線を直線として処理できる」ところです。同様に、この問題も鏡で反射させるのをやめて直線に変えてみましょう。



線分 OB に関して OA と対称な線分 OA' を用意して、反射した光線を観察してみます。すると、光線は単に直進しているように見えるというのがわかると思います。

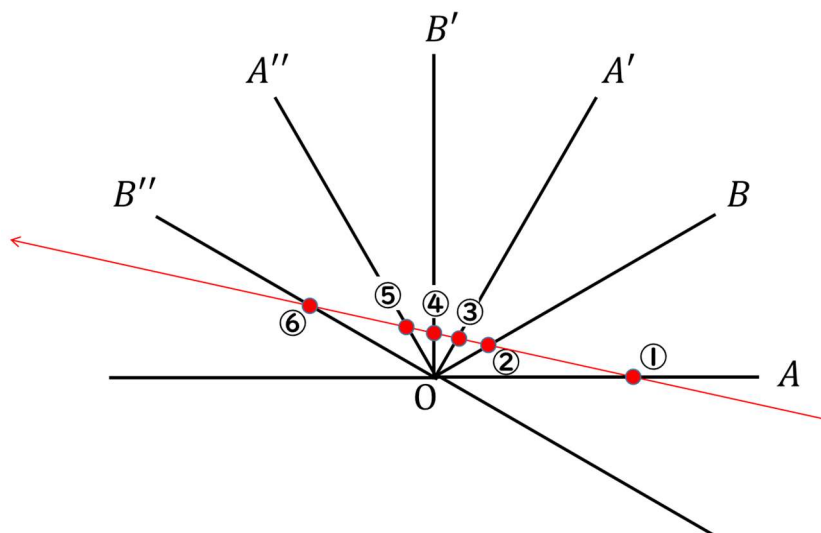
これを繰り返すと、たとえば問題文の図2は下のようになります。



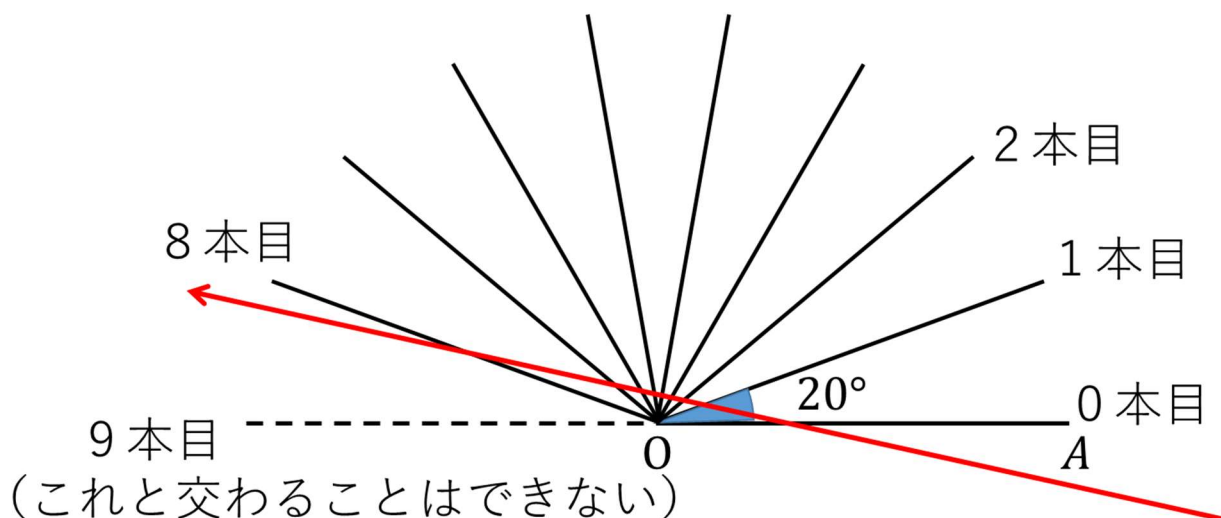
結局光線は直進するだけですから、

ひとつの直線が、 $OA, OB, OA', OB', \dots$ の何本と交わることができるか？

を考えればよいことになります。したがって(1)の答えは 6回 です。



この6回という数字は、 $180 \div 30$ で求めることができます。同様に(2)は $180 \div 20$ で9回交わるすることができます。これは下の図をみるとわかります。



最初に交わった線分を0本目としたとき、そこから数えて1, 2, ..., 8本目と交わることはできるのに9本目と交わることはありません。したがって答えは9回です。

まったく同様に、(3)は $180 \div x$ が正解です。ただし $\frac{180}{x}$ が整数とは限らないので、答えは $\left\lceil \frac{180}{x} \right\rceil$ 回です。

ここで $\left\lceil \frac{180}{x} \right\rceil$ は天井関数といって、切り上げを表します。 $\frac{180}{x}$ を下回らない最小の整数（ガウス記号の逆）です。