

先月の解答・解説

2019 年 1 月の問題

(1) 図1のように、円の3つの弦 AD, BE, CF が内部の1点で交わっています。このとき $\frac{BC}{AB} \times \frac{DE}{CD} \times \frac{FA}{EF} = 1$ であることを示してください。

(2) (1)のとき、点 A,B,C,D,E,F における円の接線をそれぞれ引いて円に外接する六角形を作ります。この六角形の対角線は図2のように3本が1点で交わることを示してください。

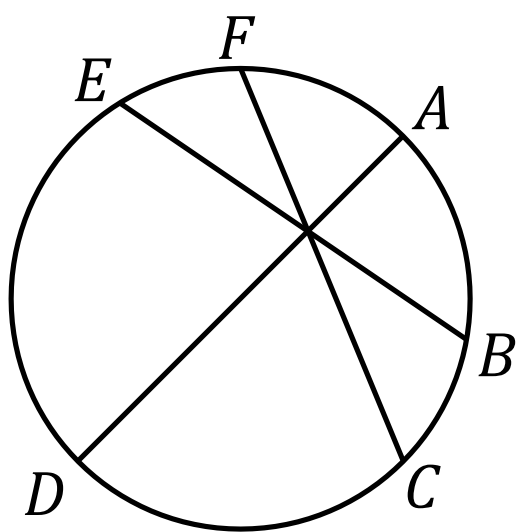


図 1

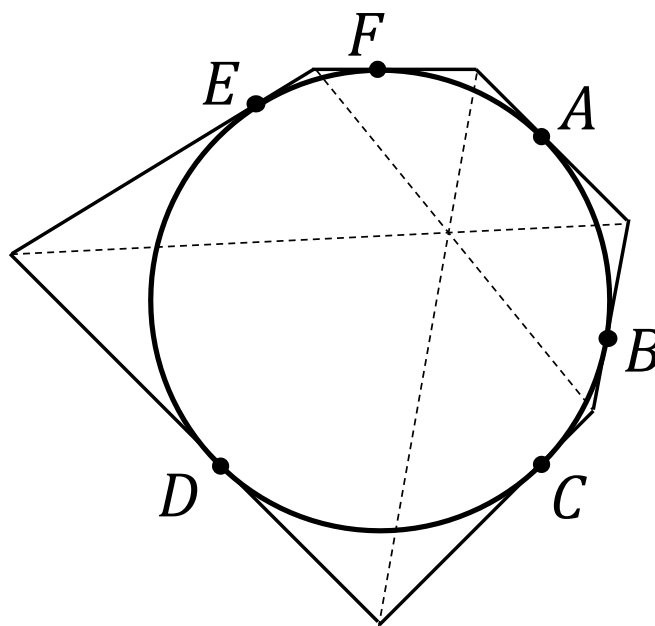


図 2

解説

はじめにお詫びですが、校内の電光掲示板に当初表示していた式は間違いでした。

$$\frac{\widehat{BC}}{\widehat{AB}} \times \frac{\widehat{DE}}{\widehat{CD}} \times \frac{\widehat{FA}}{\widehat{EF}} = 1 \quad \text{と書いていましたが} \quad \frac{BC}{AB} \times \frac{DE}{CD} \times \frac{FA}{EF} = 1 \quad \text{が正しいです。}$$

(1) は、高校や中学の数学で話をつけることができます。

交点を O とします。

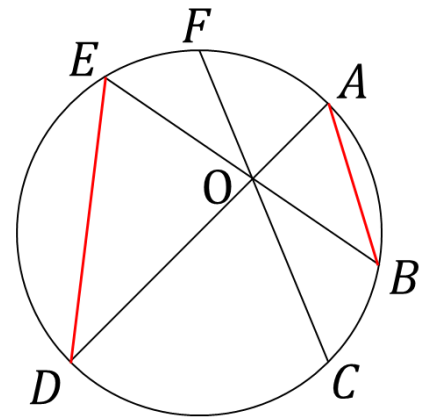
$\triangle ABO$ と $\triangle EDO$ に注目すると、円周角の定理からこの2つは相似なので

$$AB : AO = ED : EO$$

よって

$$AB \cdot EO = ED \cdot AO \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

となります。



$$\text{同様に} \triangle EFO \text{ と } \triangle BCO \text{ で} \quad FE \cdot BO = BC \cdot FO \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\triangle CDO \text{ と } \triangle AFO \text{ で} \quad CD \cdot FO = AF \cdot DO \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

が作れるので、 $\textcircled{1}\textcircled{2}\textcircled{3}$ をすべて掛け算して

$$AB \cdot CD \cdot EF \cdot (BO \cdot EO \cdot FO) = BC \cdot DE \cdot FA \cdot (AO \cdot DO \cdot FO)$$

割り算して

$$\frac{BC}{AB} \times \frac{DE}{CD} \times \frac{FA}{EF} \times \frac{AO \times DO}{BO \times EO} \times \frac{FO}{FO} = 1$$

最後に、方べきの定理から $OB \cdot OE = OA \cdot OD$ なので $\frac{AO \times DO}{BO \times EO} = 1$ ですから

$$\frac{BC}{AB} \times \frac{DE}{CD} \times \frac{FA}{EF} = 1$$

が言えました。

(2)は有名な定理である「ブリアンションの定理」に仮定を加えたものです。

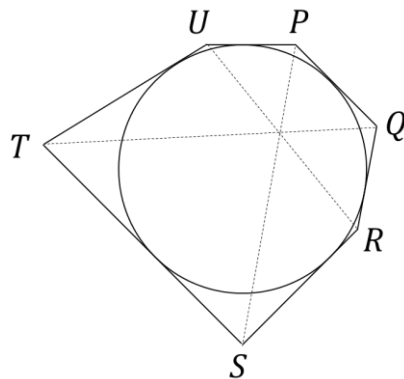
ブリアンションの定理

直線 PQ, QR, RS, ST, TU, UP が

円に接するとする。

このとき 3 直線 PS, QT, RU は 1 点で交わる。

円のほかに放物線、楕円、双曲線などの
円錐曲線でもよい。

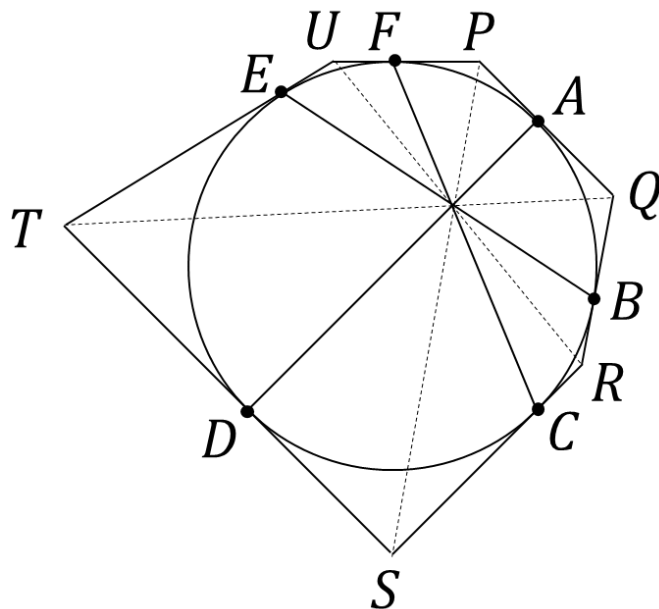


(1)の「 AD, BE, CF が 1 点で交わる」という仮定がなくても、一般の 6 点で成り立つことです。

これは主に、射影幾何という高校範囲を超えたレベルの数学を用いて証明されるものです。したがってなかなか有効な解答が集まりませんでした。仕方ないと思います。

六角形の頂点を、上と同様に P, Q, R, S, T, U とします。

(1) の仮定を入れると、 PS, QT, RU は点 O で交わります。



6 本の直線は同一の点で交わる

これを用いた簡単な証明が見つかるかと思ったのですが、僕自身見つけられませんでした。

来月以降の出題では、もう少し簡単なものになるよう心がけようと思います。