先月の解答・解説

2019 年 11 月の問題

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

表 1　九九の表

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	0	2	4	6	8
3	6	9	2	5	8	1	4	7
4	8	2	6	0	4	8	2	6
5	0	5	0	5	0	5	0	5
6	2	8	4	0	6	2	8	4
7	4	1	8	5	2	9	6	9
8	6	4	2	0	8	6	4	2
9	8	7	6	5	4	3	2	1

表 2　九九の一の位の表

上の表 1 と表 2 について、次の問に答えてください。

⑴　表 2 は、九九の一の位を並べたものです。これが点対称になっていることを証明しなさい。

1	2	3	4	5	6
2	4	6	11	13	15
3	6	12	15	21	24
4	11	15	22	26	33
5	13	21	26	34	42
6	15	24	33	42	51

表 3　七進法での九九

1	2	3	4	5	6
2	4	6	1	3	5
3	6	2	5	1	4
4	1	5	2	6	3
5	3	1	6	4	2
6	5	4	3	2	1

表 4　七進法での九九の一の位

⑵　表 4 は、7 進法における九九です。表 2 に加えてどんな性質があるか考えて書きなさい。

⑶　【チャレンジ問題】

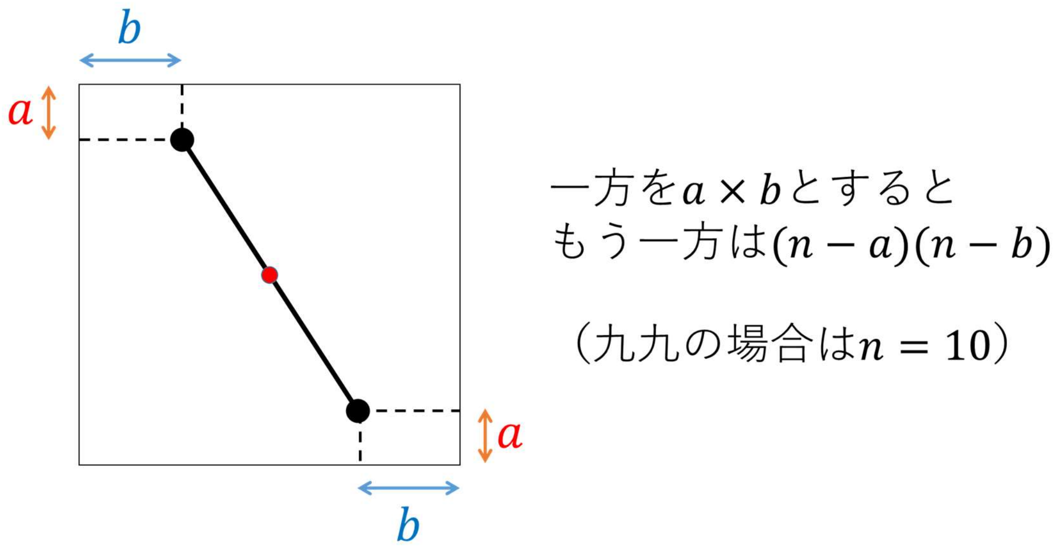
⑵で答えた性質は、10 進法や 7 進法以外の記数法ではどうなりますか。

解説

(1) 数学 A の「整数」分野から出題しました。

　いくつかのマスを実際に見てみれば、点対称であることは確認できると思います。

　８１マスすべてを確認すれば証明できたことになるのですが、ここでは次のように考えてみます。



　点対称ということですから、対応する２点を考えます。一方を$a \times b$とすると、もう一方は$(n-a)(n-b)$になるはずです。nはいくつでしょう？$n=9$でしょうか？

　左上が１×１で右下が９×９ですから、$n=9$だと辻褄が合いません。$n=10$とするとうまくいきます。

　したがって、一方が$a \times b$の場合にもう一方は

$$(10-a)(10-b)=100-10a-10b+ab$$

です。「一の位」というのは 10 で割った余りのことですから、この２つの一の位は一致します。

　ちなみに、九九の表は右の直線についても対称になることがわかります。

　これは、先ほどと同じような方法でも示せますし、「線対称かつ点対称」な図形の性質を考えても示すことができます。

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	0	2	4	6	8
3	6	9	2	5	8	1	4	7
4	8	2	6	0	4	8	2	6
5	0	5	0	5	0	5	0	5
6	2	8	4	0	6	2	8	4
7	4	1	8	5	2	9	6	9
8	6	4	2	0	8	6	4	2
9	8	7	6	5	4	3	2	1

この直線に関しても
対称になる

(2)　よく観察すると、10 進法では「0」や「5」という数字が多いのに 7 進法ではすべての数字がバランス良く現れていることがわかります。さらに各列と各行についてそれぞれ見てみると、1 から 6 までの数字がちょうど 1 つずつ現れていることがわかります。

1	2	3	4
2	4	1	3
3	1	4	2
4	3	2	1

5進法の九九

1	2	3	4	5	6
2	4	6	1	3	5
3	6	2	5	1	4
4	1	5	2	6	3
5	3	1	6	4	2
6	5	4	3	2	1

7進法の九九

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	4	6	8	10	1	3	5	7	9
3	6	9	1	4	7	10	2	5	8
4	8	1	5	9	2	6	10	3	7
5	10	4	9	3	8	2	7	1	6
6	1	7	2	8	3	9	4	10	5
7	3	10	6	2	9	5	1	8	4
8	5	2	10	7	4	1	9	6	3
9	7	5	3	1	10	8	6	4	2
10	9	8	7	6	5	4	3	2	1

11進法の九九

他の n 進法で考えてみると、n が素数のときにこの性質が表れそうです。これを証明してみましょう。これには、次のことを証明すればよいです。

証明すべきこと：

n を素数とする。$1 \leqq a < n$ のとき、n 個の数　$a, 2a, 3a, \ldots, (n-1)a$ を n で割った余りはすべて異なる。

整数を n で割った余りは n 種類ですから、「余りがすべて異なる」ことを証明すれば「1 種類ずつ現れる」ことが証明できます。これをさらに変形してみましょう。

証明すべきこと：

n を素数とする。$1 \leqq a < n$、$1 \leqq k < m < n$ のとき、ka と ma を n で割った余りは異なる。

ここまでくればあとは簡単です。ka と ma を n で割った余りが異なる事を示すには、$ma - ka$、つまり $(m-k)a$ が n の倍数でないことを示せばよいからです。実際、$m-k$ も a も n の倍数ではないので、n が素数であることから証明できました。

(3)　上のことから、n が素数のときには先ほどの性質が成り立っていることが言えます。

n が素数でないときには $n = pq$ となり（$1 < p < q < n$）、たとえば $m - k = p$, $a = q$ のとき余りが一致します。よって「各列・各行に数字が 1 種類ずつ　⇔　n が素数」ということがわかりました。