

先月の解答・解説

2019 年 9 月の問題

電卓で $\frac{1}{9998}$ を計算すると

$$\frac{1}{9998} = 0.\underline{0001}\underline{0002}\underline{0004}\underline{0008}\underline{0016}\underline{0032}\dots$$

となり、

$$1, 2, 4, 8, 16, 32 \dots$$

と、規則的な数列が表れます。

(1) 電卓で、分数 $\frac{n}{m}$ を計算すると

$$0.\underline{0001}\underline{0003}\underline{0009}\underline{0027}\underline{0081}\dots$$

になりました。整数 n と m は何でしょうか。ただし、約分した形（既約分数）で書いてください。

(2) 電卓で、分数 $\frac{n}{m}$ を計算すると

$$0.\underline{0101}\underline{0203}\underline{0409}\underline{0827}\underline{1681}\dots$$

になりました。整数 n と m は何でしょうか。ただし、約分した形（既約分数）で書いてください。

(3) 【チャレンジ問題】 電卓で、分数 $\frac{n}{m}$ を計算すると

$$0.\underline{0101}\underline{0203}\underline{0508}\underline{1321}\underline{3455}\dots$$

になりました。整数 n と m は何でしょうか。ただし、約分した形（既約分数）で書いてください。

解説

(1)

$0.0001000200040008\dots$ が $\frac{1}{9998}$ なので、 $0.0001000300090027\dots$ は $\frac{1}{9997}$ であると予想できます。

実際計算してみるとたしかにそうなっているのですが、予想できない場合でも使える方法はないでしょうか？

$$x = 0.00010003000900270081 \dots$$

とおくと

$$3x = 0.00030009002700810243 \dots$$

$$\frac{3x}{10000} = 0.00000003000900270081 \dots$$

ですから

$$x - \frac{3x}{10000} = 0.0001$$

となり $x = \frac{1}{9997}$ が示せました。

(2)

$0.01010203040908271681\dots$ に関してそのまま(1)と同じ方法を使ってもあまり意味がないので、

$$\frac{1}{9998} = 0.00010002000400080016 \dots$$

$$\frac{1}{9997} = 0.00010003000900270081 \dots$$

を組み合わせましょう。一本目の式の両辺を100倍すると

$$\frac{100}{9998} = 0.01000200040008001600 \dots$$

ですから、足し合わせることで

$$\frac{100}{9998} + \frac{1}{9997} = 0.01010203040908271681 \dots$$

となり、 $\frac{n}{m} = \frac{100}{9998} + \frac{1}{9997} = \frac{504849}{49975003}$ が示せました。

(3)

1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,...

はフィボナッチ数列と呼ばれるもので、

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 1, \quad a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \quad (n \geq 1)$$

という漸化式によって定められます。式に $n = 1, 2, 3, \dots$ を順に代入すると

$$a_3 = a_2 + a_1 = 1 + 1 = 2$$

$$a_4 = a_3 + a_2 = 2 + 1 = 3$$

$$a_5 = a_4 + a_3 = 3 + 2 = 5$$

というふうに次々と値が決まっていきます。さて、

$$x = 0.0101020305081321 \dots$$

としたとき

$$\begin{array}{r} \frac{x}{100} = 0.000101020305081321 \dots \\ + \quad \frac{x}{10000} = 0.00000101020305081321 \dots \\ \hline \frac{x}{100} + \frac{x}{10000} = 0.00010203050813213455 \dots \end{array}$$

ですから、 $x = \frac{x}{100} + \frac{x}{10000} + 0.01$ が成立します。よって $x = \frac{n}{m} = \frac{100}{9899}$ です。

このように、数列の漸化式を用いれば目的の分数を得ることができます（たとえば (1)は $a_{n+1} = 3a_n$ という漸化式を用いてとくこともできます）。

よって等比数列やフィボナッチ数列などの数列を分数で再現できるわけですね。

最後にみなさんに考えていただきたいのは、(2)の小数を(1)(3)と同じように解けないか？ということです。つまり

$$0.01010203040908271681\dots$$

を表す数列

$$1, 1, 2, 3, 4, 9, 8, 27, 16, 81, \dots$$

を一つの漸化式で表せないかということです。ちょっと考えてみてください。