先月の解答・解説

2019 年 6 月の問題

$$x = 2 + \cfrac{1}{8 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \frac{1}{3}}}}},\ y = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\ddots}}}}}$$

のように、数を分数の入れ子で書くことを考えます。（これを「連分数展開」といいます。

(1) x の値は$\frac{201}{95}$であることを、計算して確かめなさい。

(2) $\frac{2019}{5}$を連分数展開しなさい。つまり、上のように分子が 1 の連分数で表しなさい。

(3) $y = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\ddots}}}}} = 1 + \cfrac{1}{1 + 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\ddots}}}}} = 1 + \cfrac{1}{1 + y}$ なので、

です。これを$\sqrt{2}$の連分数展開といいます。

$\sqrt{3}$を連分数展開してください。

(4) 【チャレンジ問題】

無理数を連分数展開したとき、その展開は無限に続くことを証明してください。

また、有理数を連分数展開したとき、展開は有限の長さで終わることを証明してください。

解説

今回は連分数展開のなかでも分子が 1 のものだけを扱いました。分子が 1 のものを「正則連分数展開」といいますが、単に連分数展開といって正則連分数展開を指すこともあります。

(1)　分数をひとつずつまとめていけばよいです。

$$
\begin{aligned}
2+\frac{1}{8+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{3}}}}} &= 2+\frac{1}{8+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{\frac{4}{3}}}}} = 2+\frac{1}{8+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{3}{4}}}} = 2+\frac{1}{8+\frac{1}{1+\frac{1}{\frac{7}{4}}}} \\
&= 2+\frac{1}{8+\frac{1}{1+\frac{4}{7}}} = 2+\frac{1}{8+\frac{1}{\frac{11}{7}}} = 2+\frac{1}{8+\frac{7}{11}} = 2+\frac{1}{\frac{95}{11}} \\
&= 2+\frac{11}{95} = \frac{201}{95}
\end{aligned}
$$

(2)　これは逆に、整数部分と残りにわけて分数を作っていくとよいです。

$$
\frac{2019}{5} = 403+\frac{4}{5} = 403+\frac{1}{\frac{5}{4}} = 403+\frac{1}{1+\frac{1}{4}}
$$

(3)　$\sqrt{3}$ は無理数なので、この操作が無限に続いてしまいます。
基本となる操作は

- 整数部分と小数部分にわける（$\sqrt{3}$ の整数部分は 1，小数部分は $\sqrt{3}-1=0.732\ldots$）
- 小数部分の逆数をとる（$\sqrt{3}-1$ の逆数は $\frac{1}{\sqrt{3}-1}=\frac{\sqrt{3}+1}{2}$）

の 2 つで、これを繰り返しましょう。

$$
\begin{aligned}
\sqrt{3} &= 1+(\sqrt{3}-1) = 1+\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{3}-1}} = 1+\frac{1}{\frac{\sqrt{3}+1}{2}} \\
&= 1+\frac{1}{1+\frac{\sqrt{3}-1}{2}} = 1+\frac{1}{1+\frac{1}{\frac{2}{\sqrt{3}-1}}} = 1+\frac{1}{1+\frac{1}{\sqrt{3}+1}} \\
&= 1+\frac{1}{1+\frac{1}{2+(\sqrt{3}-1)}} = 1+\frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{3}-1}}}} = 1+\frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{\frac{\sqrt{3}+1}{2}}}} \\
&= 1+\frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{1+\frac{\sqrt{3}-1}{2}}}} \\
&= 1+\frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{1+\frac{1}{2+(\sqrt{3}-1)}}}} \\
&= 1+\frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{1+\frac{1}{\ddots}}}}}}
\end{aligned}
$$

というわけで、$\sqrt{3} = 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\ddots}}}}}}$ が言えました。

記号で書くと $\sqrt{3} = [1;\ 1,\ 2,\ 1,\ 2,\ ,\ldots] = [1;\ \overline{1,\ 2}]$ となり、1, 2 が無限に続きます。

(4)　無理数だと無限に操作が続くのは、(3) で体感できたかと思います。

もし x の連分数展開が有限の長さで終わったら、(1) のように元の数を再現できるので、x は有理数になります。

逆に、有理数であれば (2) のように連分数展開していけるのですが、このとき

- $2019 \div 5$ は 403 あまり 4
- $5 \div 4$ は 1 あまり 1

と、割り算の繰り返しをしていることになります。

したがって登場する数字が徐々に小さくなるので、いずれは 1 がでてきて捜査が終わります。つまり有理数は有限の長さの連分数展開で終わるのです。

今回は 4 月、5 月の問題より簡単だったからか、解答を寄せてくれた人が多かったです。

次のチャレンジも期待しています。