

先月の解答・解説

(1)

$$A = \underbrace{999999 \dots 9}_{2018 \text{ 桁}} \text{とする。}$$

A^2 の一の位、十の位、百の位…の数字をすべて足すといくつになるか。

(2) 【チャレンジ問題】

$$B = \underbrace{444444 \dots 4}_{2018 \text{ 桁}} \text{とする。}$$

B^2 の一の位、十の位、百の位…の数字をすべて足すといくつになるか。

解説

中学1年生、高校1年生がよく解いていたようです。(1)は簡単で、実際に計算すると

$$A^2 = \underbrace{999999 \dots 9}_{2017 \text{ 桁}} \underbrace{8000000 \dots 0}_{2017 \text{ 桁}} 1$$

という4036桁の数になり、各桁の和は $9 \times 2017 + 8 + 1 = 18162$ です。

この問題を解くとき、多くの人が

$$9 \times 9 = 81$$

$$99 \times 99 = 9801$$

$$999 \times 999 = 998001$$

$$9999 \times 9999 = 9998001$$

$$\text{「よって、」 } 999999 \dots 9 \times 999999 \dots 9 = 999999 \dots 98000000 \dots 01$$

という解答をしていましたが、これは危険です。たとえば

$$1 \times 1 = 1$$

$$11 \times 11 = 121$$

$$111 \times 111 = 12321$$

$$1111 \times 1111 = 1234321$$

$$\text{「よって、」 } 11111111111 \times 11111111111 = 123456789101110987654321$$

は間違いです（なぜ違うのか考えてみましょう）

この2つの「よって」には、前者は結果的に正しいものが得られ、後者は間違えてしまうという違いがありますが、解いている間は合っているのか間違っているのかわかりません。きちんとした「証明」を行うか、いきなり2018桁のものを考えるようにしましょう。解答例はこれです。

$$\begin{aligned}
 \underbrace{999999 \dots 9}_{2018} \times \underbrace{999999 \dots 9}_{2018} &= \underbrace{999999 \dots 9}_{2018} \times \left(\underbrace{1000000 \dots 0}_{2018} - 1 \right) \\
 &= \underbrace{999999 \dots 99}_{2018} \underbrace{000000 \dots 0}_{2018} - \underbrace{999999 \dots 9}_{2018} \\
 &= \underbrace{999999 \dots 98}_{2017 \text{ 桁}} \underbrace{000000 \dots 01}_{2017 \text{ 桁}}
 \end{aligned}$$

(2)は、多くの人が苦戦していましたが、その中でも2人が正解していました。正解していた人の解答は以下のようなものでした。

$$4 \times 4 = 16 \text{ (和は 7)}$$

$$44 \times 44 = 1936 \text{ (和は 19、上より 12 多い)}$$

$$444 \times 444 = 197136 \text{ (和は 27、上より 8 多い)}$$

$$4444 \times 4444 = 19749136 \text{ (和は 40、上より 13 多い)}$$

と順番に考えていくと、増加量は

12、8、13、9、5、10、6、11、7、12、8、13、9、…

と「12、8、13、9、5、10、6、11、7」を繰り返す。したがって2018桁のときの和は

$$7 + \underbrace{(12 + 8 + 13 + 9 + 5 + 10 + 6 + 11 + 7) + \dots + (12 + 8 + 13 + 9 + 5 + 10 + 6 + 11 + 7)}_{2016 \div 9 = 224 \text{ なので、224 回}} + 12$$

$$\text{を計算して、} 7 + 81 \times 224 + 12 = 18163$$

この方法も、(1)のときと同様に「繰り返す」と言い切る部分が怪しいです。こちらの想定していた解答は、(1)を使う物で

$$\begin{aligned}
 B^2 &= \underbrace{999999 \dots 98}_{2017 \text{ 桁}} \underbrace{000000 \dots 01}_{2017 \text{ 桁}} \times \frac{16}{81} \\
 &= 15 \underbrace{999999 \dots 968}_{2016 \text{ 桁}} \underbrace{000000 \dots 016}_{2016 \text{ 桁}} \times \frac{1}{81}
 \end{aligned}$$

として、あとは割り算するものです。(このあとは繰り返しが生じるので、「繰り返しが生じる理由」をきちんとする必要があります。)