

先月の解答・解説

第 1 問

次のような「マイナス10進法」という記数法を考えます。

- 各桁に 0～9 の数字を用いる。
- 各桁は右から 1 の位、-10 の位、100 の位、-1000 の位…となる。
- マイナスの符号「-」を用いてはいけない。

たとえば

$$2018_{(10)} = 2 \times 10^3 + 0 \times 10^2 + 1 \times 10^1 + 8 \times 10^0$$

$$2018_{(-10)} = 2 \times (-10)^3 + 0 \times (-10)^2 + 1 \times (-10)^1 + 8 \times (-10)^0 = -2002_{(10)}$$

となります。次の問題に答えなさい。

- (1) $2018_{(10)}$ を -10 進法で表しなさい。
- (2) $-2018_{(10)}$ を -10 進法で表しなさい。
- (3) 【チャレンジ問題】 どんな整数も -10 進法で表せることを示しなさい。

第 2 問

2018 個の合同な小三角形に分割できる三角形が
存在することを証明しなさい。

解説

第 1 問

数学 A で学習する記数法は 2 進法・3 進法・・・と、底が 2 以上の整数の場合でした。今回は底が負であるような記数法を考えます。

(1)

$$1_{(-10)} = 1_{(10)}$$

$$2_{(-10)} = 2_{(10)}$$

⋮

$$9_{(-10)} = 9_{(10)}$$

が成り立っていますが、10 以降は $10_{(-10)} = -10_{(10)}$ であり、ここから先は別の規則が必要です。ここからは

$$10_{(10)} = 190_{(-10)}$$

を使用することになります。実際

$$11_{(10)} = 191_{(-10)}$$

$$12_{(10)} = 192_{(-10)}$$

$$13_{(10)} = 193_{(-10)}$$

⋮

$$19_{(10)} = 199_{(-10)}$$

$$20_{(10)} = 180_{(-10)}$$

$$30_{(10)} = 170_{(-10)}$$

$$40_{(10)} = 160_{(-10)}$$

⋮

$$90_{(10)} = 110_{(-10)}$$

$$91_{(10)} = 111_{(-10)}$$

$$92_{(10)} = 112_{(-10)}$$

$$93_{(10)} = 113_{(-10)}$$

⋮

$$99_{(10)} = 119_{(-10)}$$

となります。

また $100_{(10)} = 100_{(-10)}$ なので、これを続けると

$$1_{(10)} = 1_{(-10)}$$

$$10_{(10)} = 190_{(-10)}$$

$$100_{(10)} = 100_{(-10)}$$

$$1000_{(10)} = 19000_{(-10)}$$

⋮

となり、結局

$$2018_{(10)} = 2000_{(10)} + 10_{(10)} + 8_{(10)} = 18000_{(-10)} + 190_{(-10)} + 8_{(-10)} = 18198_{(-10)}$$

が答えです。

(2)

(1)と全く同様に解けます。

$$-1_{(10)} = 19_{(-10)}$$

$$-2_{(10)} = 18_{(-10)}$$

$\vdots$

$$-10_{(10)} = 10_{(-10)}$$

$$-11_{(10)} = 29_{(-10)}$$

$\vdots$

$$-18_{(10)} = 22_{(-10)}$$

に気づくことができれば、 $-2000_{(10)} = 2000_{(-10)}$ ですから、

$$-2018_{(10)} = -2000_{(10)} + (-18_{(10)}) = 2000_{(-10)} + 22_{(-10)} = 2022_{(-10)}$$

となります。

(3)

これが一番難しかったと思います。「ある整数が -10 進法で表せるかどうか」ではなく、「 -10 進法で表せる整数がどのような範囲か」という視点で考えると良いです（結局同じ事ですが・・・）

-10 進法で1桁で表せる数は、次のようになります。

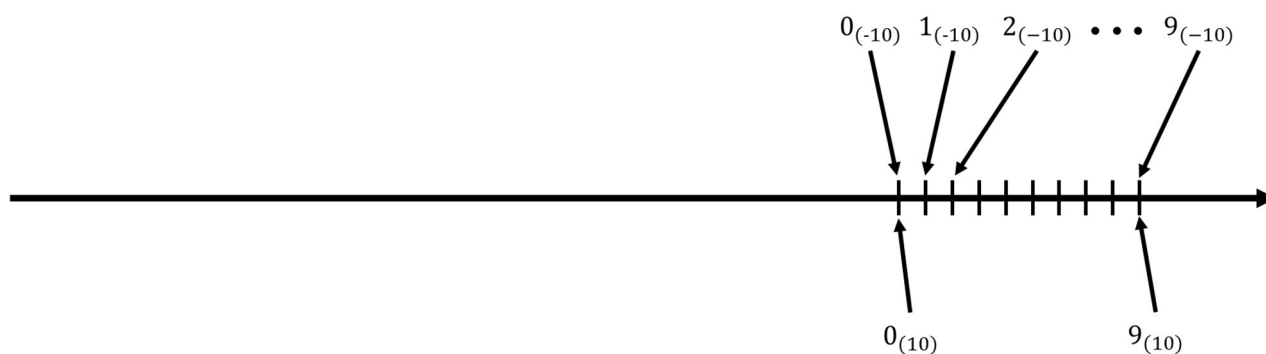


図1 1桁だと、 $0_{(10)}$ から $9_{(10)}$ までの整数を表せる

図1は、 $0_{(-10)}$ から $9_{(-10)}$ までの整数を数直線上に表したものです。これは10進法での0から9と一致しました。次に $10_{(-10)}$ から $19_{(-10)}$ までの整数を見てみましょう。

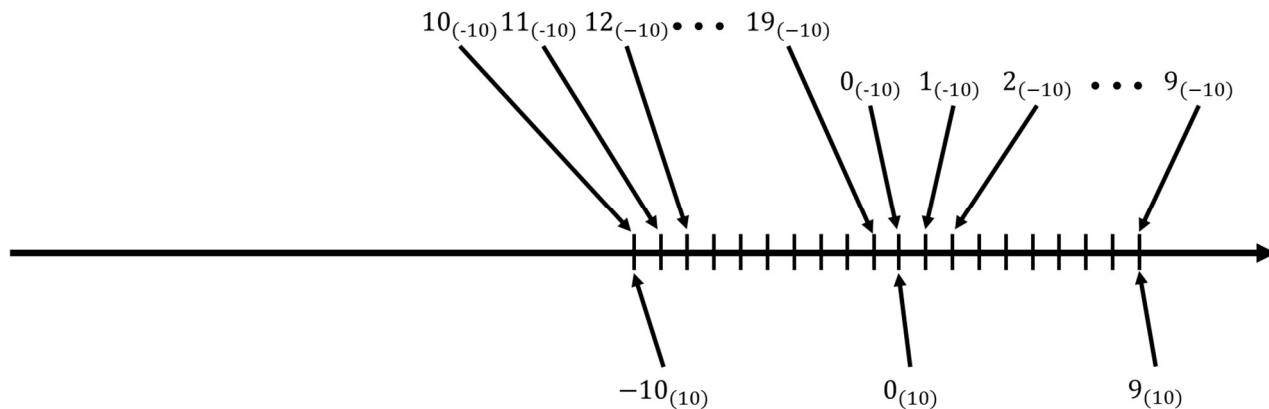


図2 $0_{(-10)}$ から $19_{(-10)}$ までの整数は、10進数だと $-10_{(10)}$ から $9_{(10)}$ まで

$10_{(-10)}$ から $19_{(-10)}$ までの整数を追加すると、 $0_{(-10)}$ から $9_{(-10)}$ までの数とうまくつながりました。同様に $99_{(-10)}$ までの整数を追加してみましょう。

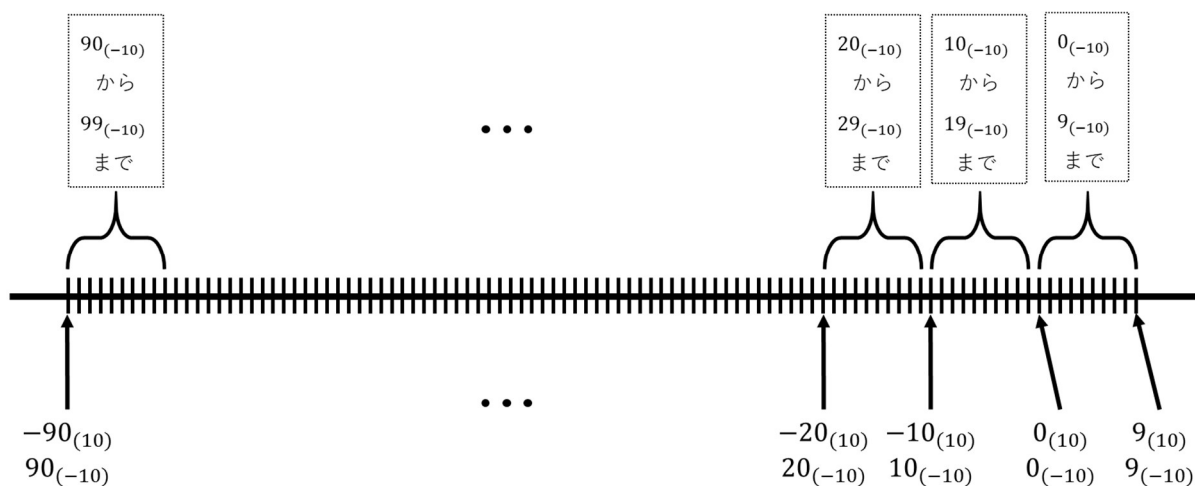


図3 $0_{(-10)}$ から $99_{(-10)}$ までの整数は、10進数だと $-90_{(10)}$ から $9_{(10)}$ まで

というわけで、 -10 進法を用いて2桁以下で表せる整数は、「 $-90_{(10)}$ から $9_{(10)}$ までのすべて」であることがわかりました。同様に3桁以下で表せる数を見てみましょう。

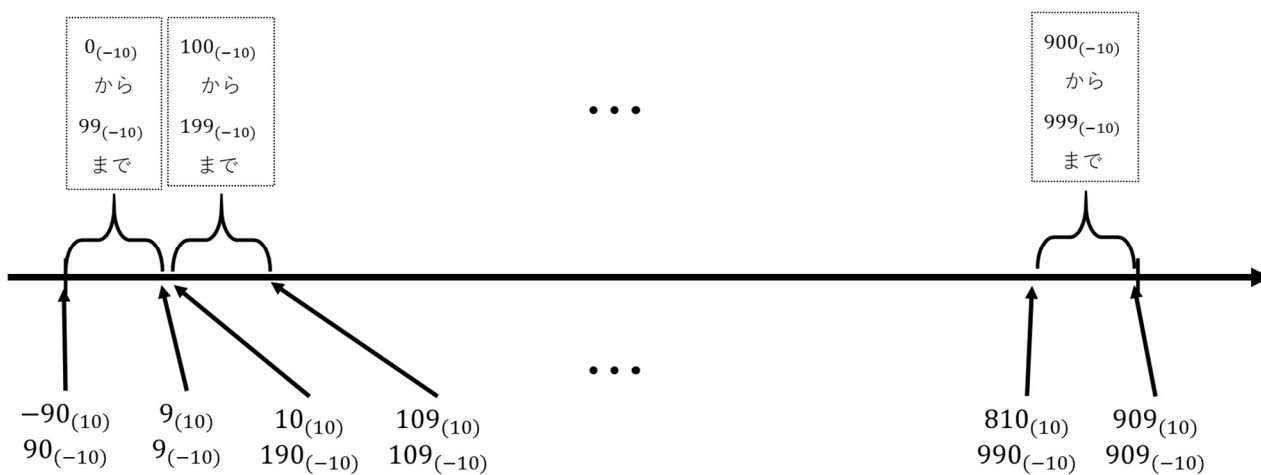


図4 $0_{(-10)}$ から $999_{(-10)}$ までの整数は、10進数だと $-90_{(10)}$ から $909_{(10)}$ まで

3桁以下で表せる整数は、「 $-90_{(10)}$ から $909_{(10)}$ までのすべて」であることがわかりました。

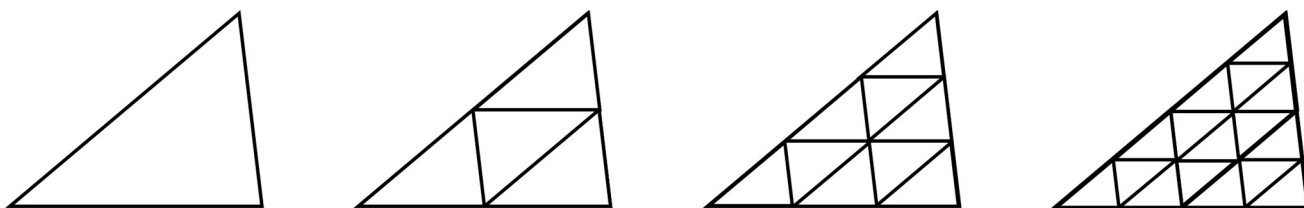
同様に4桁、5桁を考えていくと、

-10 進法を用いて $2n$ 桁以下で表せる整数は $-\underbrace{9090 \dots 90}_{2n \text{桁}}^{(10)}$ から $\underbrace{9090 \dots 9}_{2n-1 \text{桁}}^{(10)}$ まで

であることがわかり、どんな整数でも n を十分に大きくとればこの範囲に入るため、「どんな整数も -10 進法で表せる」ことが言えました。

「きょうの数学」の2018年1月号・2018年3月号にも変わった記数法が載っていますが、こういった「普段考えているものの拡張」を考えるのは楽しいものですね。

第2問



取り組んだ人たちを観察していると、予想通り「平方数しか作れない」とぼやいていました。

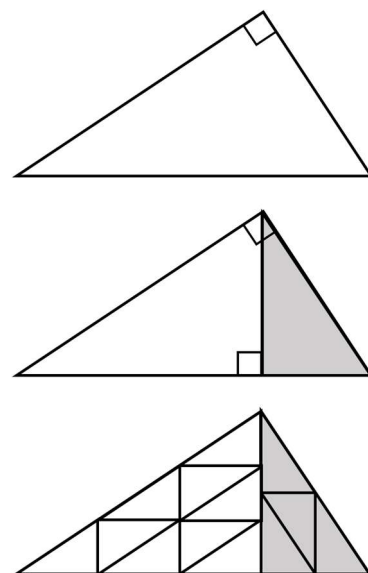
上の図のように、すべての三角形は1,4,9,16,25,...個に分割することができます。では、それ以外のパターンはどうやったら作れるのでしょうか？

いろいろ考えていると、右のようなパターンに行きつきます。

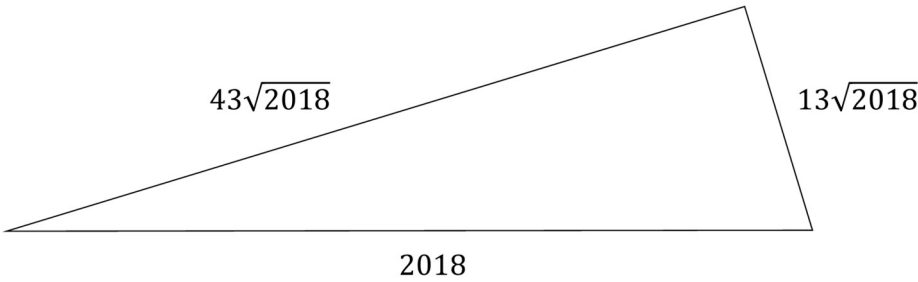
重要なのは「直角三角形は、相似な直角三角形2つに分割できる」という事実で、図は相似比が3:2の三角形に分割した図です。

すると左の三角形は小三角形9個、右の三角形は小三角形4個に分割できて、結局 $3^2 + 2^2 = 13$ 個の小三角形に分割できました。

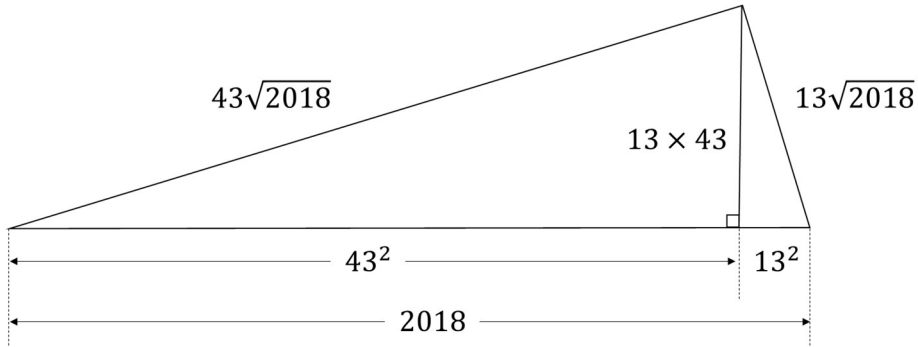
さて、 $2018 = 43^2 + 13^2$ です。これを用いると、どのような三角形を考えればよいかわかります。いかがでしょうか？



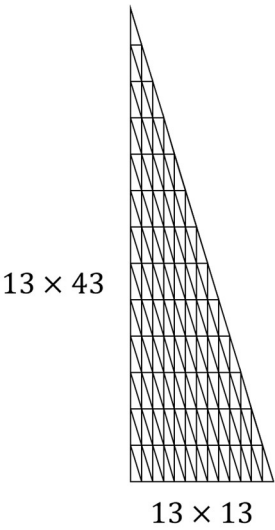
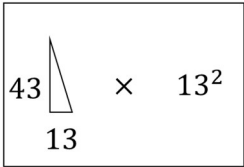
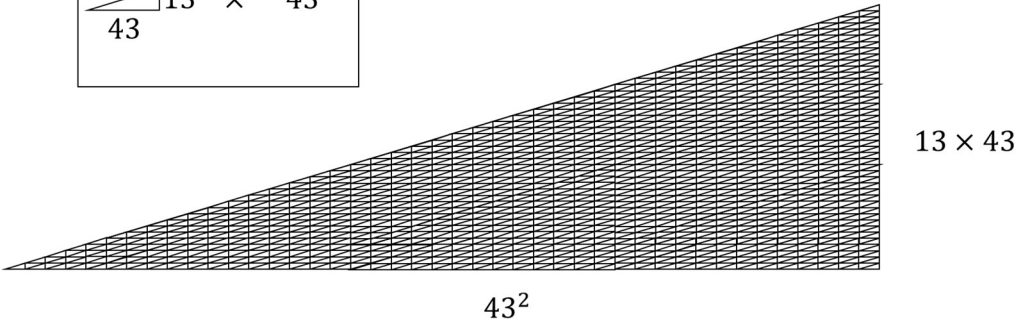
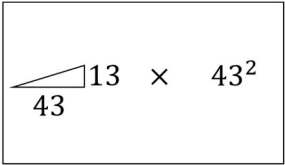
正解はこのような（あるいは、これと相似な）三角形です。



この三角形は、相似比が 43:13 となる 2 つの直角三角形に分割することができます。



あとは、左の三角形を $43^2 = 1849$ 個、 右の三角形を $13^2 = 169$ 個に分割すれば合計 2018 個になります。



ところで、 $2018 = 2 \times 1009$ であり、 $1009 = 28^2 + 15^2$ なので、図のような二等辺三角形も 2018 個に分割することができます。辺の長さの比を求めてみてください。

