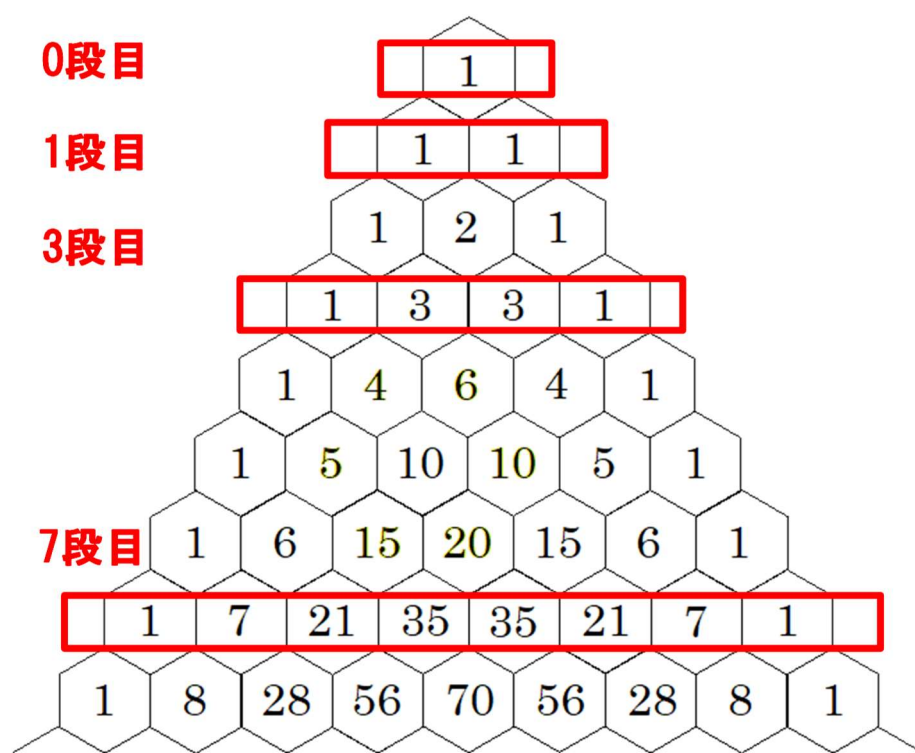


先月の解答・解説

第1問

下の図は「パスカルの三角形」と言って、以下のルールで作られます。

- ① 左端、右端には1を書く。
- ② その他のマスには、上2つの和を書く。



(1)パスカルの三角形には、図のように奇数のみが登場する段があります。

7段目の次は、何段目が奇数のみになりますか。

(2)奇数のみになるような段を、すべて求めなさい。

(3)【チャレンジ問題】3で割って1余る数のみが登場するような段を、すべて求めなさい。

(4)【チャレンジ問題】ほかの数だとどうですか。

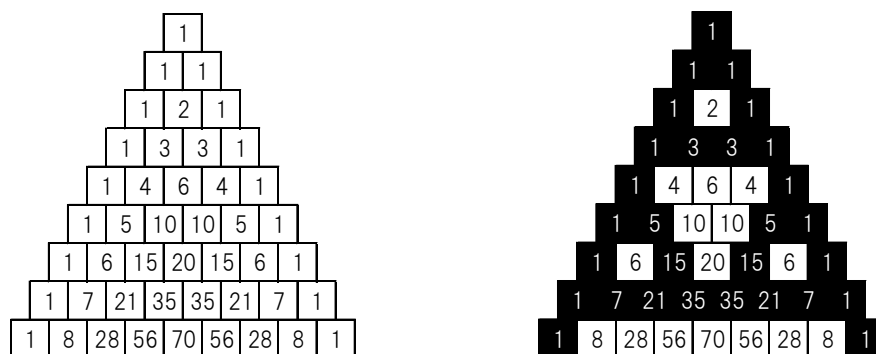
第2問

2018の数学的な性質を、自由に探してください。

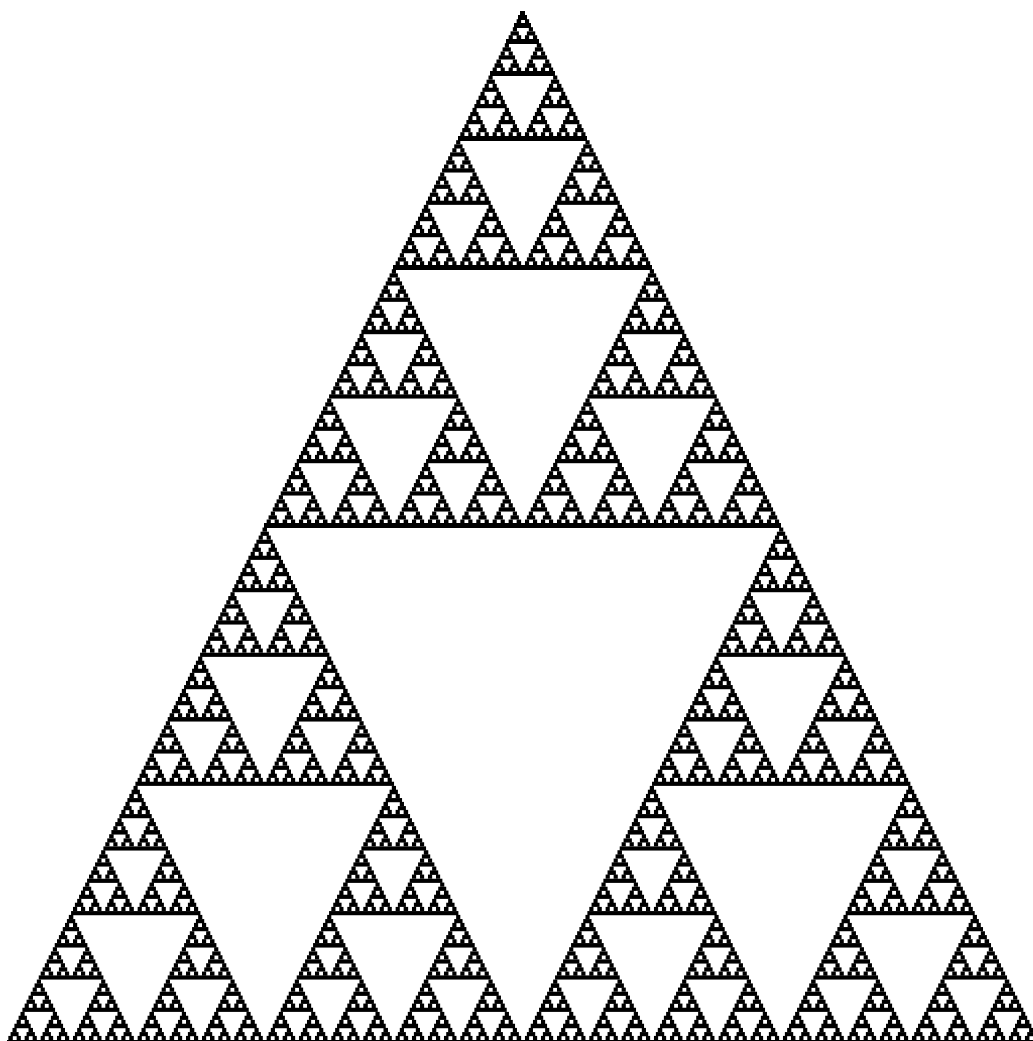
解説

第1問

パスカルの三角形からの出題は2回目です。今回は次のことをヒントに問題を作りました。



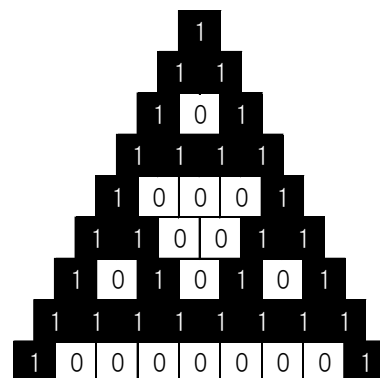
パスカルの三角形の奇数を黒、偶数を白で塗ると図のようなフラクタルの図形が現れる。



これは「シェルピンスキーのギャスケット」というフラクタル図形です。フラクタル図形については、ちょうど「きょうの数学」の2018年2月号に記事が載っているはずなので、そちらを参照してください。

<http://www2.hamajima.co.jp/kyoto-math/kyomath.html>

なぜこのようなことになるのか説明してみましょう。偶数を「0」、奇数を「1」で表すことにします。すると $0 + 0 = 0$, $0 + 1 = 1$, $1 + 0 = 1$, そして $1 + 1 = 0$ が成り立ちます。数学 A で学習する合同式を使えば「 $1 + 1 \equiv 0 \pmod{2}$ 」なので、これは mod 2 での計算を書いているのと同じです。mod 2 でのパスカルの三角形を書くと、次のようになります。



さて、図の三角形が繰り返される様子を見てみましょう。
まず3段目までパスカルの三角形を書くと図1のようになります。

3段目はすべてが奇数なので、4段目は図2のように、両端が1、その間は0になります。

$0 + 0 = 0$ なので、5, 6段目の図3の場所は0です。

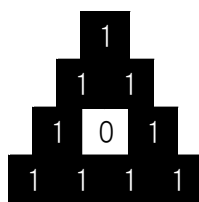


図1

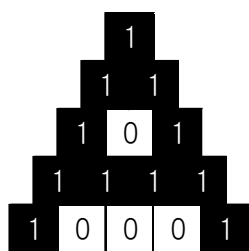


図2

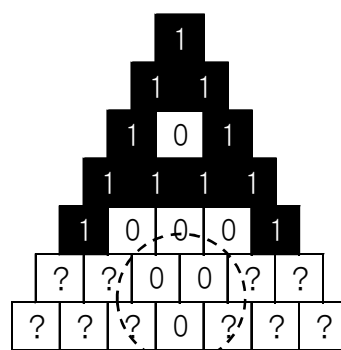


図3

すると、0は足し算に影響を及ぼさないので、0～3段目が4～7段目の図4の場所に繰り返されることになります。

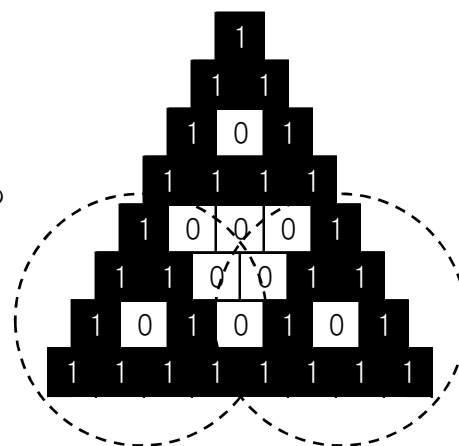


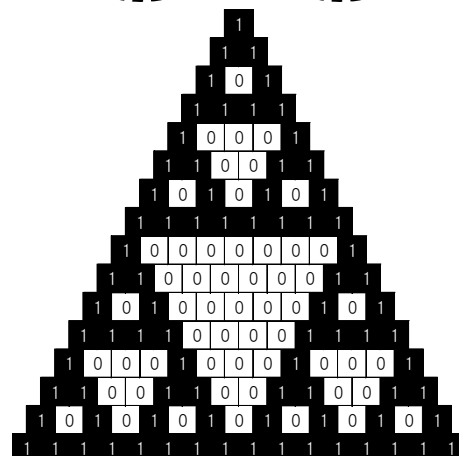
図4

3段目はすべて1だったので、7段目もすべて1です。したがって8段目の両端は1、その間は0です。

これが繰り返されていくので、0～7段目が8～15段目にかけて繰り返されます。

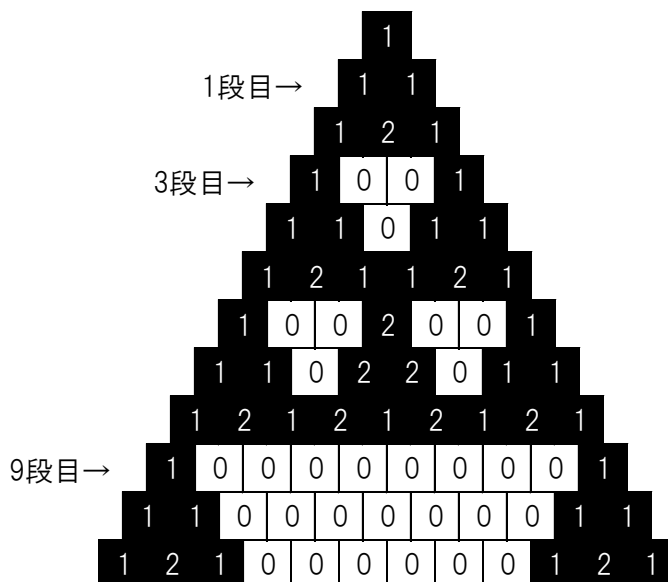
同様に0～15段目も16～31段目にかけて繰り返されます。

以上のことから奇数が並ぶのは0, 1, 3, 7, 15, 31, ...とわかりました。
(1)の答えは「15段目」です。



(2)も解いてみましょう。k回目に奇数だけになる場所を a_k 段目とすると、 $0 \sim a_k$ 段目は $a_k + 1 \sim 2a_k + 1$ 段目に掛けて繰り返されるため、 $a_{k+1} = 2a_k + 1$ が成り立ちます。これは数学Bで学習する漸化式という考え方です。 $a_1 = 0$ なので、数学Bの知識でこれを解くと $a_k = 2^{k-1} - 1$ なので、「 $2^{k-1} - 1$ 段目」が答えです。 $n = k - 1$ とすれば、答えは「 $2^n - 1$ 段目 (n は0以上の整数)」が答えでした。

さて、mod 2 でなく mod 3 でやってみるとどうでしょう。



このように「両端のみが1で、その間が0」のものが、 3^n 段目に繰り返されることがわかります。これは、パスカルの三角形が二項係数（数学II）を用いて作られることを使えば、次のように言い換えられます。

p を素数、 N を自然数とする。このとき

$$p^N C_1, p^N C_2, p^N C_3, \dots, p^N C_{p^N-1}$$

はすべて p の倍数。

これは $p^N C_k = \frac{p^N (p^N - 1)(p^N - 2) \dots (p^N - k + 1)}{k(k-1)(k-2) \dots 1}$ の分母と分子それぞれについて、 p で割り切れる回数を調べることで

わかります (k が p で割り切れる回数が0回、1回、2回、 $\dots$ 、 $N-1$ 回るときで場合分け)。

したがって図のように、mod 3に限らず、mod p (p は3以上の素数)で同様の繰り返しが起こることが分かりました。

最後に (3) (4) の答えですが、今までの図をよく見ると、2段目以降は

- どこかに p の倍数 (白いマス) がある
- p で割った余りが1のマスと、余りが $p-1$ のマスが交互に並ぶ

のどちらかであることがわかります (厳密には証明が必要)。よっての答えは「0段目、1段目のみ」です¹。

¹ (4) について、素数の場合にしか証明していないように見えますが、合成数の場合には素因数 p に注目することで簡単に証明できます (たとえば15の場合、15で割った余りが1なら3で割った余りも1)

第2問

すでにいろいろな数字好きの人たちが取り組んでいる問題ですが、2017 年や 2016 年ほどすごい性質はないようです。いくつか紹介します。

性質① $2018 = 13^2 + 43^2$ となる。つまり 2018 は二つの平方数の和で表せる。

性質② $2018 = 7^2 + 8^2 + 9^2 + \cdots + 18^2$ となる。つまり連続する平方数の和で表せる。

性質③ $2018 = 2^4 + 3^4 + 5^4 + 6^4$ となる。つまり 4 つの 4 乗数の和で表せる。

性質④ 2018 年は平成 30 年で、 $\begin{cases} x+y=30 \\ x^2+y^2=2018 \end{cases}$ の解は $\begin{cases} x=-13 \\ y=43 \end{cases}$, $\begin{cases} x=43 \\ y=-13 \end{cases}$ とどちらも整数になる。

ほかにもあるとよいのですが、あまり見つかりませんでした。①については、京都府高等学校数学研究会の冊子「きょうの数学」の、2017 年 4 月号と 2018 年 1 月号をご覧ください。

<http://www2.hamajima.co.jp/kyoto-math/kyomath.html>