

先月の解答・解説

2018 年 11 月の問題

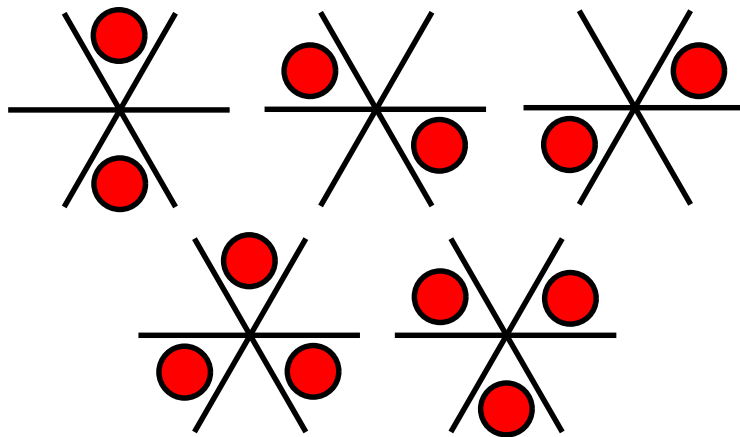
円形に並んだ椅子に何人かの生徒が座ります。このとき隣り合う椅子には座ることができません。下の図は椅子が6脚のときの「これ以上座れない配置」を表しています。これを「飽和配置」と呼ぶことにします。

椅子が6脚のとき、飽和配置は5通りあります。

- (1) 椅子が12脚のとき、飽和配置は何通りありますか。
- (2) 椅子が30脚のとき、飽和配置は何通りありますか。
- (3) (チャレンジ問題)

椅子が2018脚のとき、飽和配置は何通りありますか。

ただし、答えが大きい数なので、桁数のみ答えてください。



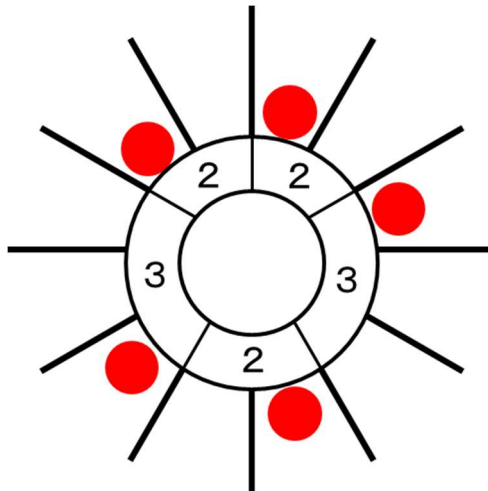
解説

問題の意味がよくわからない人も多かったと思います。こういうときには、とにかく小さい数字で試してみることが大切です。飽和配置の数を a_n とすると

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a_n	2	3	2	5	5	7	10	12	17

となります。徐々に数えるコツが見えてきたことでしょう。

(1) 飽和配置を観察すると、3つか2つの組にブロックわけできることがわかってきます。



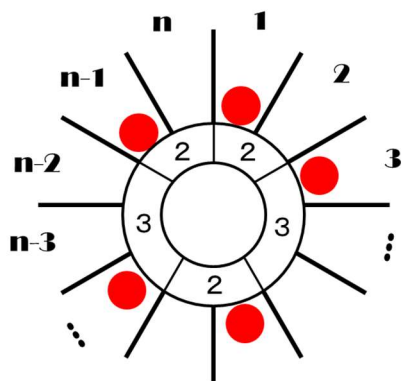
$n=12$ であれば、この並びは

- 3, 3, 3, 3 の場合 (3 通り)
- 2, 2, 3, 3, 3 の場合 (12 通り)
- 2, 3, 2, 3, 3 の場合 (12 通り)
- 2, 2, 2, 2, 2, 2 の場合 (2 通り)

の 4 種類に分類されるため、合計 29 個となります。

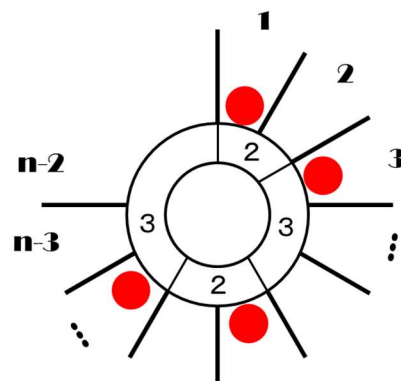
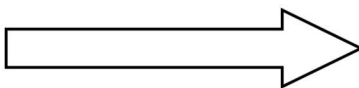
(2)

$n=30$ のときも同様に考えることができなくはないですが、ちょっとややこしくなります。したがって、ミスが少ない方法を考えていきます。

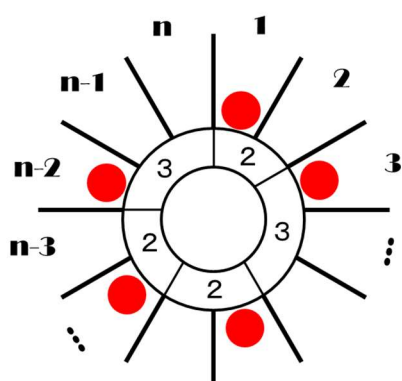


椅子n脚の飽和配置

最後のブロックを取り除く
(最後のブロックが2個の場合)

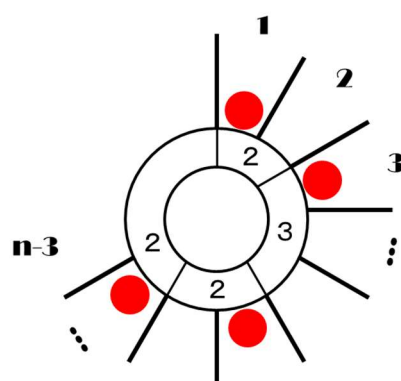
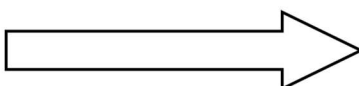


椅子n-2脚の飽和配置



椅子n脚の飽和配置

最後のブロックを取り除く
(最後のブロックが3個の場合)



椅子n-3脚の飽和配置

椅子に 1 から n までの番号をふり、n 番目の椅子が入ったブロックを取り除くことにします。
すると取り除いた配置も飽和配置になっており、これを使えば n が 5 以上のとき

$$a_n = a_{n-2} - a_{n-3}$$

が成り立つことが分かります。これは数学 B で学習する漸化式というもので、これを使えば

	n	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	a_n	2	3	2	5	5	7	10	12	17
n	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
a_n	22	29	39	51	68	90	119	158	209	277
n	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
a_n	367	486	644	853	1130	1497	1983	2627	3480	4610

となり、答えは 4610 通りとなります。

(3)

同じ方法で 2018 まで求めてもいいのですが、まともに計算すると

2786560688330094417133422767177163831242949677789420152892923033143738079771268527551877429349
00920309426184175929946289758317306885261214611948260162304384785358563809381314365110269515129
0268548117870471127878038415370261444422672248701367105282

という数になり大変です。あまり良い方法とは言えない気がします（これはパソコンで計算しました）。

そこで、このような漸化式の数列は隣り合う項の比が収束することを用いることにしましょう。実際、

$$a_n = s a_{n-1} + t a_{n-2} + u a_{n-3}$$

という形の漸化式をもつ数列の一般項は

$$a_n = A \times \alpha^n + B \times \beta^n + C \times \gamma^n$$

(A,B,C は n に関係ない定数。α,β,γ は 3 次方程式 $x^3 = sx^2 + tx + u$ の解)

と書けることが知られています¹（ただし、α,β,γ が全て異なる数の場合。また絶対値が最大のものを α とした）。
ここから

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{A\alpha^{n+1} + B\beta^{n+1} + C\gamma^{n+1}}{A\alpha^n + B\beta^n + C\gamma^n} = \frac{\alpha + \frac{B\beta}{A}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n + \frac{C\gamma}{A}\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^n}{1 + \frac{B}{A}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n + \frac{C}{A}\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \alpha$$

となります。つまり n が十分大きいとき、 a_n は公比が α の等比数列とみなせる²ということです。

さて、前ページの表を見て使えそうなところを探すと、 $a_{28} = 2627$ と $a_{18} = 158$ から

$$\alpha^{10} \doteq \frac{2627}{158} \doteq 16.6$$

とわかります。したがって、 a_{2018} は a_{18} に α^{10} を 200 回かけたものですから、

$$\log_{10} a_{2018} = \log_{10}(a_{18} \times 16.6^{200}) = \log_{10} a_{18} + 200 \log_{10} 16.6 = \log_{10} 158 + 200 \log_{10} 16.6 = 246.2187$$

となり³、247 桁であることがわかりました。ちなみに

$$\alpha = \frac{1}{3} \left(\frac{27}{2} - \frac{3\sqrt{69}}{2} \right)^{1/3} + \frac{\left(\frac{1}{2}(9 + \sqrt{69}) \right)^{1/3}}{3^{2/3}} = 1.3247 \dots$$

¹ 理由は長いので割愛します。近くの数学の先生に聞いてください。

² これはちょっと言葉遣いが怪しいですね

³ 最後のイコールでは、対数表を使いました。

がわかっていますが、これを求めるのは難しそうですね。

ところで、ほかの場所でもやってみましょう。

「 $a_{30} = 4610$ 」「 $a_2 = 2$ 」を使えば $\alpha^{28} \doteq 2305$ となるので、 $2018 \div 28 = 72$ あまり 2 だから

$$\log_{10} a_{2018} = \log_{10}(a_2 \times 2305^{72}) = \log_{10} a_2 + 72 (\log_{10} 461 + \log_{10} 5) = 240.2554$$

となり、241 桁という結果になってしまいます。「 $a_{29} = 3480$ 」「 $a_9 = 12$ 」を使えば $\alpha^{20} \doteq 290$ だから

$$\log_{10} a_{2018} = \log_{10}(a_{18} \times 290^{100}) = \log_{10} a_{18} + 100 \log_{10} 290 = 248.4387$$

で、249 桁になります。近い値が出てはいるものの、見過ごせない誤差が生じていますね。

この誤差を見ると、前ページの

$$\log_{10} a_{2018} = 246.2187$$

というのも怪しく見えてきます⁴。この誤差は n が小さいところでは等比数列とのずれが大きいため、これをなくすためにはできるだけ大きいところで a_k や a_m をとって計算するとよいです。また k と m の差が小さくても誤差が大きくなります。

ためしに $a_{50} = 1276942$ を使って計算してみましょう。 $\alpha^{20} \doteq \frac{a_{50}}{a_{30}} = 276.99 \dots \doteq 277$ だから

$$\log_{10} a_{2018} = \log_{10}(a_{18} \times 277^{100}) = \log_{10} a_{18} + 100 \log_{10} 277 = 246.4487$$

となり、実際の値 $\log_{10} a_{2018} = 246.445 \dots$ にとても近い値が出ます。近似の精度については僕自身もよくわかっていないところが多いので、ぜひ自分で調べてみてください。

⁴ 実際、最高位の数字を計算すると間違ってしまう。