

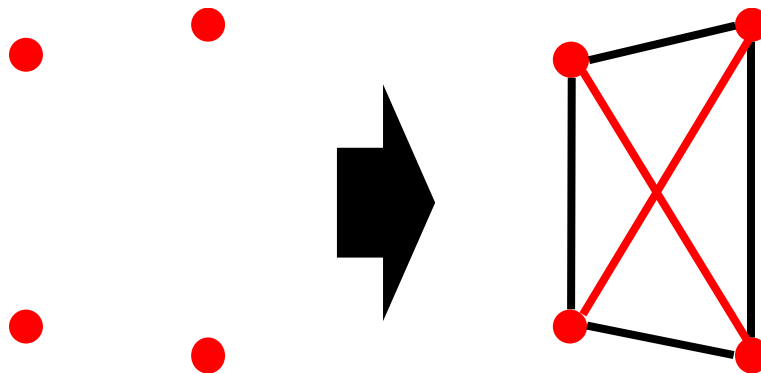
先月の解答・解説

2018 年 10 月の問題

平面上に n 個の点があり、これを線分で結ぶ。

このとき最も長い線分を、この点の集合の「直径」と呼ぶことにする。

- (1) $n=5$ のとき、直径は最大で何本か。
- (2) $n=6$ ではどうか。
- (3) $n=7,8,9,10$ ではどうか。



例えばこの場合、
この 4 点の集合の「直径」は 2 本となる

解説

前回の続きです。前回は「グラフ」と呼ばれる題材との関連も話しましたが、今回は難しそうです。

いきなり $n = 6$ を考えるのは難しそうなので、 $n = 3$ から順に考えていきましょう。

$n = 3$ のとき、3本の辺を引くことができ、その全てを最大長にできます。
よって最大は3本です。

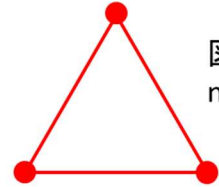


図1
 $n = 3$ の最大

$n = 4$ のときは6本の辺を引くことにはなりますが、最大長は4本まで、5本を同時に最大長にすることはできません。

(5本の直径を作ろうとすると6本中5本が同じ長さと言うことになり、図3のようにするしかない。すると直径は別の辺になり、条件に反する)

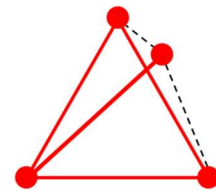


図2
 $n = 4$ の最大

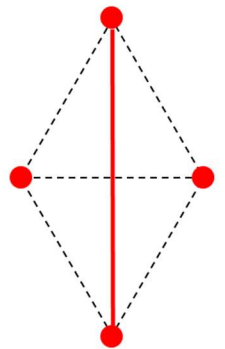


図3
 $n = 4$ 失敗例

$n = 5$ 以上のときは、つぎのような線の引き方を考えつけます。($n = 6$ のときが一番思いつきづらいですね)

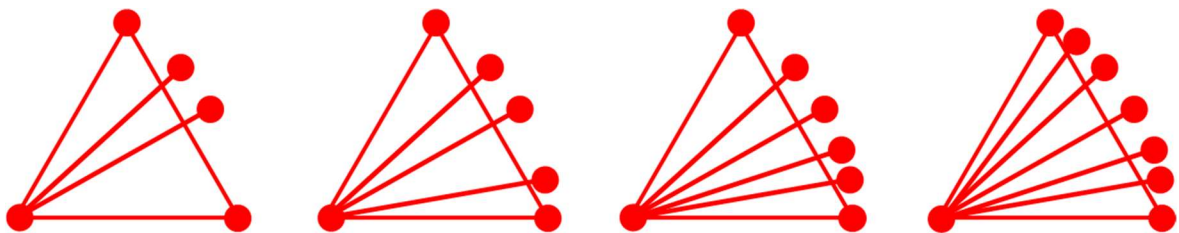


図4 $n = 5, 6, 7, \dots$ で直径が n 本ある図

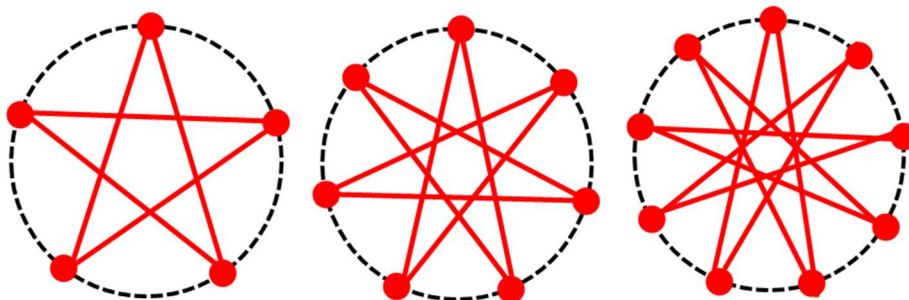


図5 $n = 5, 7, 9, \dots$ で直径が n 本ある図

これ以上は、どうも作れそうにありません。したがって、答は「 n 本」とであると予想できます。
では、これをどのように証明すれば良いのでしょうか？

以下は、文献[1]を参考にして書いた証明です。数学的帰納法（数学 B）を使って証明しています。

（証明）

[STEP1] $n=4$ のとき、前のページの議論から最大は 4 本で、5 本以上は不可能。

[STEP2] $n=k$ （ただし $k \geq 4$ ）のとき、直径は n 本が最大であるとする。

このとき $n=k+1$ のときも n 本が最大であることを示す。

① n 本、つまり $k+1$ 本が可能であることは、前ページの議論から言える。

② $n+1$ 本以上は引けないことを示す。

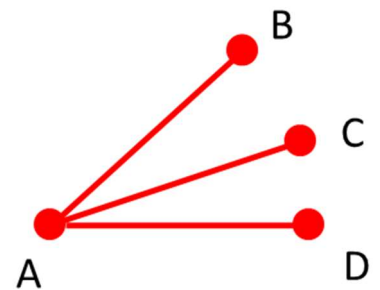
$n \geq 4$ なので、4 つ以上は頂点がある。

頂点が n 個で直径が $n+1$ 本以上なので、鳩ノ巣原理から直径が 3 本以上ある頂点が存在する。

この頂点を A 、また A と直径でつながっている頂点 3 つを時計回りに B, C, D とする。

このとき、 $\angle BAD$ は 60° 以下である。

（ 60° より大きいとすれば、線分 BD が直径より長くなる）



点 C からは、これ以上直径が出ていないことを示す。

点 C から他の直径が引かれたとして、その新しい頂点を E とする。

このとき、

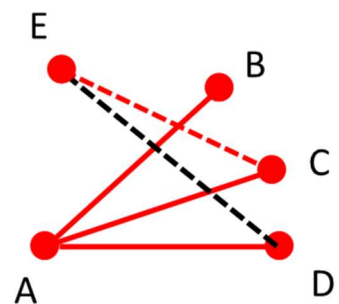
● CE と AB が交われば DE が直径より長くなり矛盾する。

● CE と AD が交われば BE が直径より長くなり矛盾する。

● CE が AB, AD のどちらとも交わらなければ

AE が直径より長くなり矛盾する。

よって点 C には AC 以外の直径がない。



最後に、いま点 C を含めて $k+1$ 個の点があるが、「 C を除いた『 k 個の点の集合』」を考えたときその最大本数は k 本である。

よって C を含めた場合でも最大は $k+1$ 本である。

いかがだったでしょうか。今回は少し証明に手間取りましたが、 n 本という結果にたどり着いた人は少なくないと思います。いろいろ実験することで見えてくる問題でした。

参考にした本

[1] ピーター・フランクル、前原 潤 「幾何学の散歩道—離散・組合せ幾何入門—」 1991 年、共立出版