先月の解答・解説

2018年9月の問題

n 個の都市があり、これを道路で結ぶ。このとき

① 同じ 2 都市を結ぶ道路はない

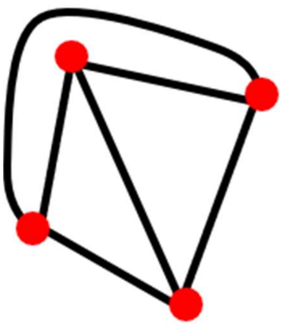
② 道路は交差しない

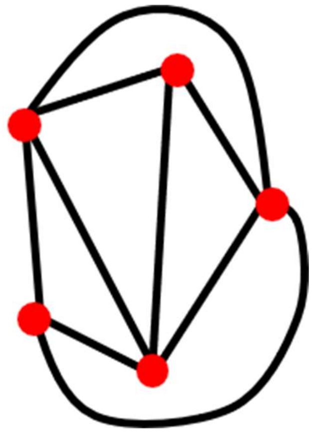
という条件を満たすものとする。

例として、n=4 では最大で 6 本、n=5 では最大で 9 本の道路を引くことができる。

(1) n=6 のとき、最大で何本の道路を引けるか。

(2) n=7,8,9,10 ではどうか。





解説

「グラフ」と呼ばれる題材を使って出題しました。このように道路の形や頂点の位置を無視して

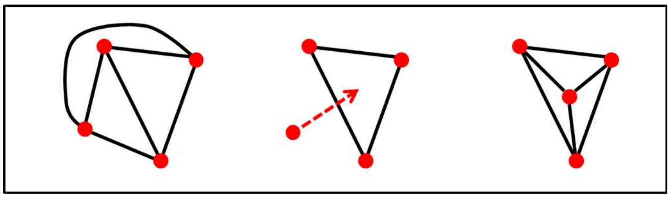
- 頂点がいくつあるか？
- どの頂点と頂点がつながるか？

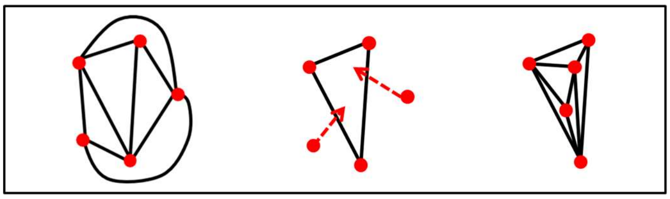
の２つの情報に注目したものをグラフといい、過去の数学者によって様々なことが調べられてきました。

今回考えたのは「平面グラフ」といって、辺が交差をもたないようなグラフです。平面グラフについては、次の非常に強力な定理があります。

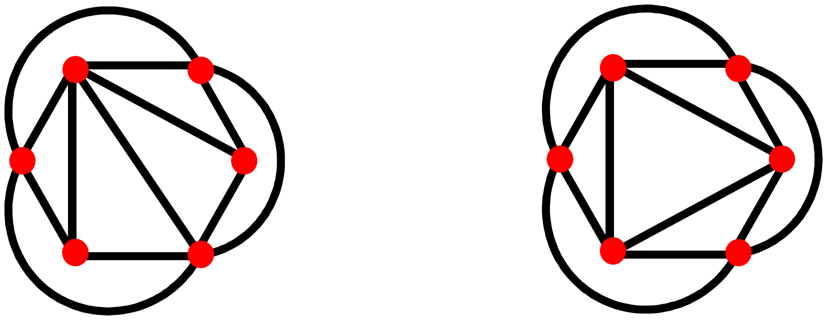
Fáry の定理

平面グラフは、頂点の位置を変えることで辺を直線的にできる。





(1)　実際 $n=6$ で図を書いてみると、12 本の道路が引けることがわかりました。



「13 本以上ひけるかどうか」は、すべての引き方を一つ一つ試す必要があり、それには膨大な場合分けが必要になり大変です。

しかし n=6 くらいの小さい値であれば、なんとかなると思います。本質的には上の２パターンしかないので、道路が５本ある街が存在するかどうかで場合分けすればいいはずです。

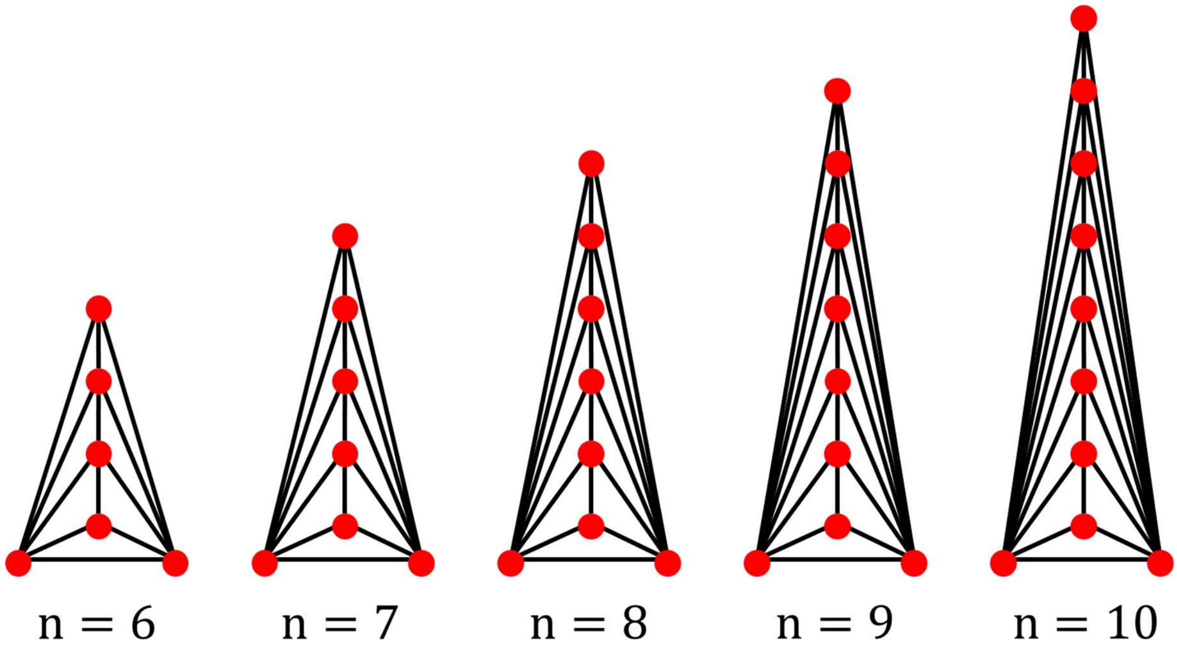
(2)　$n \geqq 7$ のとき、てきとうに道路をひくだけでも答えが見えてきますが、示すのはなかなか難しそうです。

先に答を書いてしまうと、$n \geqq 7$ で（実際は$n \geqq 3$で）

道路は最大で $(3n-6)$ 本

であることがわかります。

適当に線を引くだけでもいいのですが、規則的に頂点や辺を追加していくとよいです。



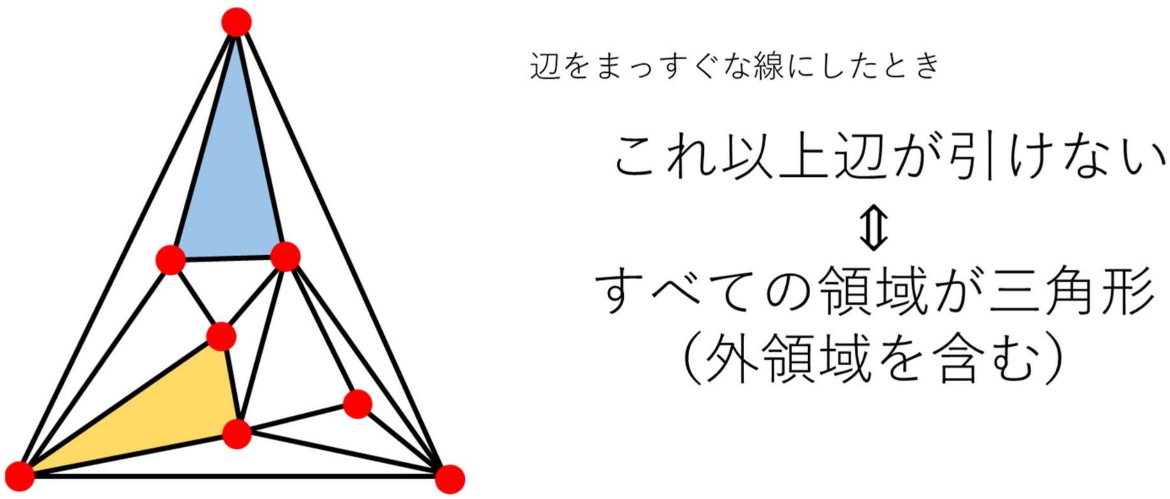
勧修中学校 3 年生の桂田さんは、頂点を 1 方向に並べる方法に辿りついていました。これは桂田さんのものと本質的には同じ図ですが、今後の説明のために辺をまっすぐな線にしています。

この図を見ると、頂点 1 つごとに 3 つ辺を増やせるので 3n-6 本の道路が引けるとすぐにわかりますね。

では、「3n-6 本より多くの道路が引けない」ことはどうやったら示せるでしょうか？この図のように引いた場合には、確かにこれ以上引くことはできないのですが、ほかの図の引き方なら可能かもしれませんよね。

実際、n=10 のとき、3n-6 本の道路を引く方法は本質的なものだけでも 233 通り[1]あり、これをすべて手動で調べるのはほぼ不可能だと思います。そこで論理的に考える必要が出てきます。

そこで、次の事実に注目してみましょう。



[1] n=6,7,8,…のとき、本質的に異なる道路の引き方は 2, 5, 14, 50, 233, 1249, 7595, … 通り
（オンライン整数列大辞典　https://oeis.org/A000109　より）

別に辺が直線的でなくてもよいのですが、すべての領域が 3 つの辺に囲まれていることに気づくはずです。
グラフの世界ではこの領域のことを「面」と呼びます。このとき、一番外側の領域も面とみなします。前ページの図では、外領域も三本の辺に接しており、三角形であると考えることができます。

これに気づくと、「頂点が n 個ですべての面が三角形の時、辺の数はいくつか？」という話を考えればよいことになり、飛躍的に前進します。数学 A で学習する「オイラーの多面体定理」を使いましょう。

オイラーの多面体定理

頂点の数をv，辺の数をe，面の数をfとしたとき $v-e+f=2$

数学 A では多面体について述べている定理ですが、平面グラフについても成り立ちます。
この 2 つには密接な関係があり、互いに行き来することができます。洛北高校 2 年の黒川くんはこの共通点に気づいてか、多面体を用いた解答で 3n-6 という正解を得ていました。

最後に、「面がすべて三角形であるとき $2e=3f$」という事実を使うことができます。
これは道路が 2 車線であると考えれば理解できるはずです。車線の数は 2e 本ですが、（すべての面が 3 つずつの車線に接するので）3f 本と数えることもできます。したがって$2e=3f$です。

これでようやく結論が出ました。これ以上道路を引けないとき、全ての面が三角形となるから$2e=3f$で、これを $f=\frac{2}{3}e$ と変形して$v-e+f=2$に代入すると

$$v-e+f=2$$

$$v-e+\frac{2}{3}e=2$$

$$e=3v-6$$

となり、街の数が n のとき道路は最大で$3n-6$本引けることが言えます。

ところで今月（10 月）の問題は辺の中で最長の線分を数える問題ですが、最短の線分については 3n-6 本以下であることが言えます。距離が最短である線分のみを残すと、これらの線分は交わらないからです。
というわけで 10 月の問題はこの続きです。考えてみましょう。