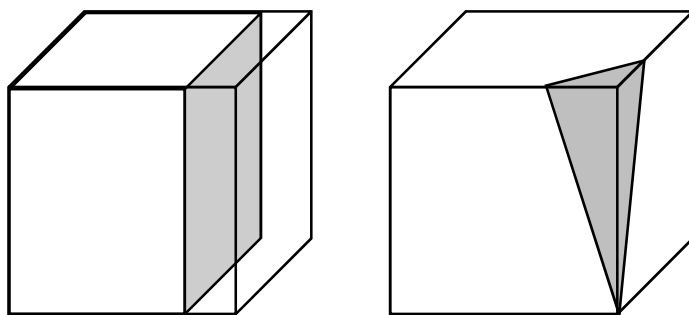


先月の解答・解説

2018 年 7 月の問題

立体図形を平面で切断したときの切り口を考えます。下は、立方体を切断して、切断面に正方形と二等辺三角形がそれぞれ現れた図です。



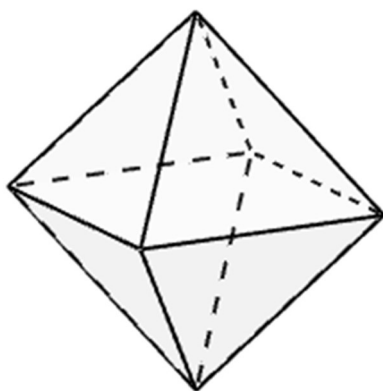
(1)立方体を平面で切断するとき、次の図形が現れることはありますか。あるなら実例を示し、ないなら証明しなさい。

- ① 正三角形 ② 五角形 ③ 七角形 ④ 正五角形 ⑤ 正七角形

(2)【チャレンジ問題】

正八面体（下図…正三角形8枚でできた図形）を平面で切断したとき、次の図形が現れることはありますか。あるなら実例を示し、ないなら証明しなさい。

- ① 正三角形 ② 五角形 ③ 六角形 ④ 七角形 ⑤ 八角形



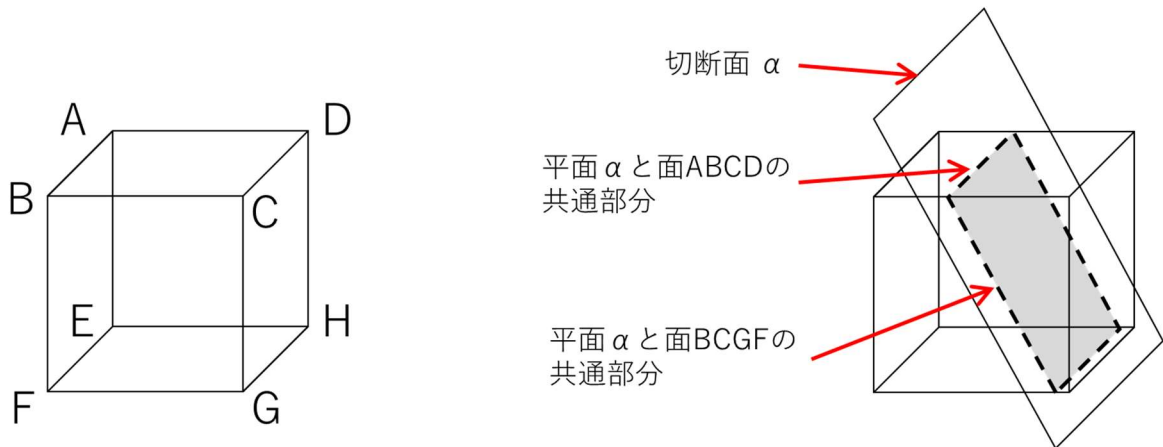
(3)【チャレンジ問題】ほかの正多面体ではどうですか。

解説

立体の切断は、受験をはじめとしてさまざまな場面で出題される要素です。切断面を考えるのに重要なのは、

「切り口の多角形の辺」 = 「切断面と元の立体の面の共通部分」

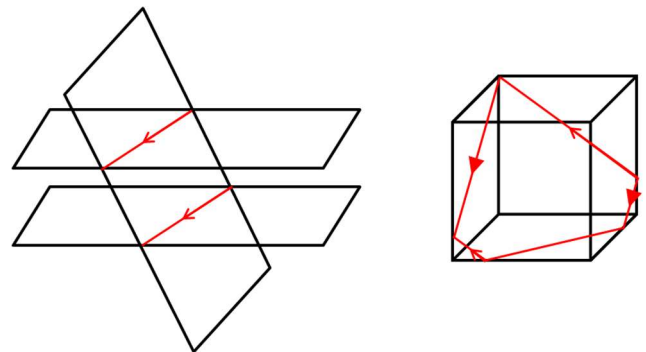
であることです。



これを考えると、切り口の辺の数は 7 本以上にはならないことがわかります。したがって七角形、八角形は作ることができません。

また、これは厳密には数学 A の範囲ですが、2つの平面が平行のとき、この平面からできる切り口は必ず平行です。

したがって五角形をつくる時、立方体の向かい合う面を用いて作った辺は平行になります。つまり正五角形は作ることができません。



以上から(1)の答は

- ① 正三角形 ② 五角形 ③ 七角形 ④ 正五角形 ⑤ 正七角形
できる できる できない できない できない

となります。①を作る方法については、自分で考えてみてください。

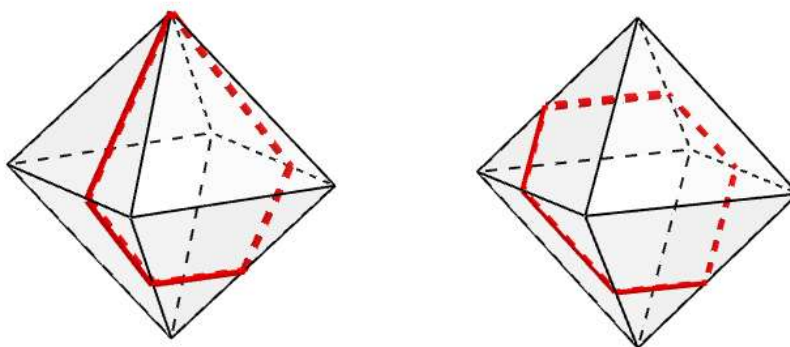
(2) このあたりから、あまり見ない題材になってきます。

正八面体を切断するとなると、様々な新しいことに取り組まないといけません。はじめに結論を言うと

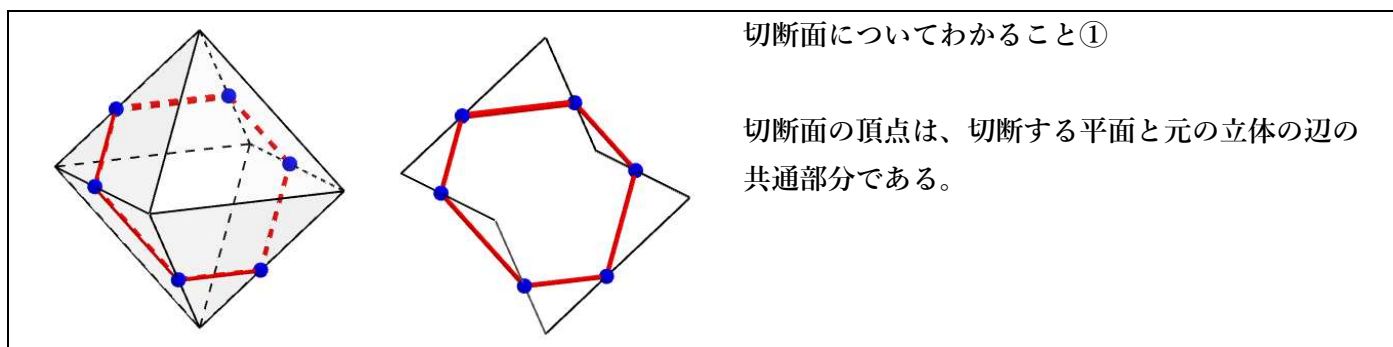
- | | | | | |
|--------|-------|-------|-------|-------|
| ① 正三角形 | ② 五角形 | ③ 六角形 | ④ 七角形 | ⑤ 八角形 |
| できない | できる | できる | できない | できない |

となります。

まず、②の五角形と③の六角形については、次のような切り方があります。ここでも正五角形は作ることができません。正六角形は作れますね。

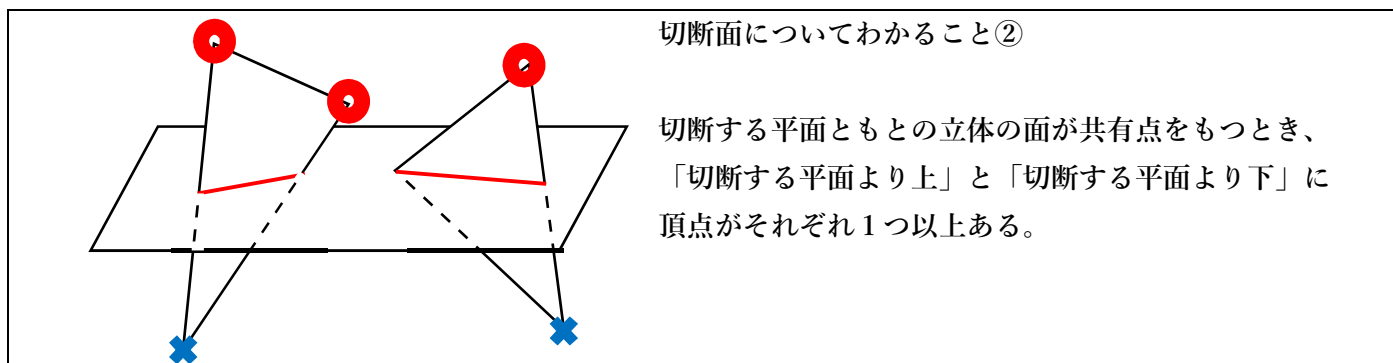


さて、正七角形を作ることはできないわけですが、どのように示せばよいでしょうか。ここでは切断面の頂点、そして正八面体の頂点に注目してみましょう。



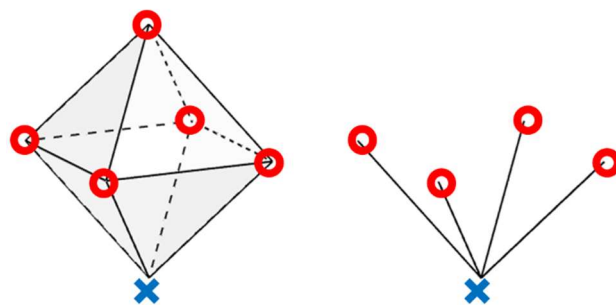
このことから、(1)では切断面と元の立体の「面」を見比べましたが、かわりに（切断面が頂点を通るのでなければ）切断面がいくつの「辺」を通るかを見れば良いと言うことが分かります。

ほかにこんなことも言えます。



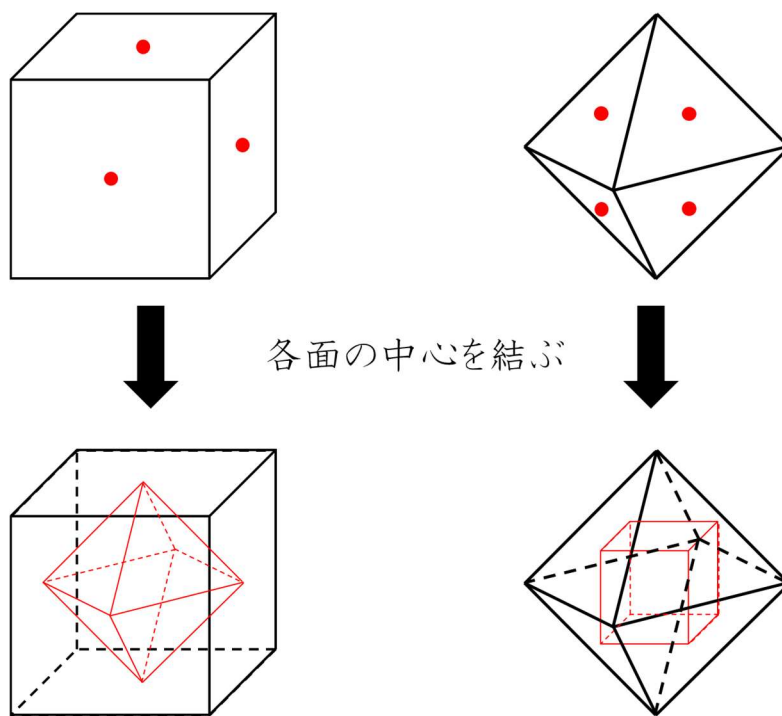
これを使えば、正八面体の頂点を「上(○)」と「下(×)」にわけること、作る図形の種類を考えることができます。

たとえば図のように頂点が分かれた場合、○と×が両方ある辺を切断面が横切る、ので、切断面は四角形であることがわかります。



あとは簡単な場合分けで、三角形、七角形、八角形ができないことがわかります。

ところで、以前言ったとおり立方体と正八面体は双対の関係にあります。



これを使えばより簡単に「最大は六角形」であることが言えるようです。ぜひ調べてみてください。

(3) 最後に他の多面体についてですが、正十二面体と正二十面体は、10角形まで作ることができます。この2つは双対の関係にあるので、結果は一致します。

¹ 「切断」するには正八面体の内部を切断面が通らないといけないので、三角形を作ることは不可能。