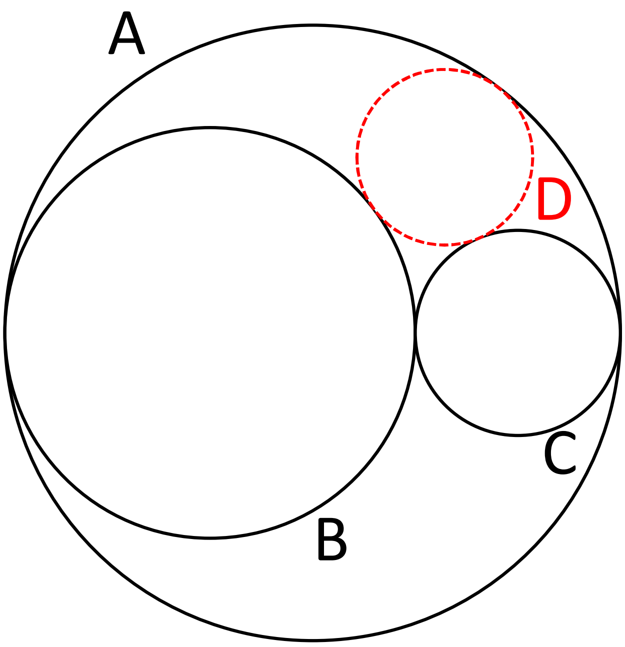
先月の解答・解説

2020 年 11 月の問題

半径 $x+1$ の円A、半径 x の円B、半径１の円Ｃが

図のように互いに接しています。

さらに、A,B,C に同時に接する円Ｄを考えます。次の問に答えなさい。



(1)　$x=2$のとき、円Ｄの半径を求めてください。

(2)　xの値にかかわらず、円Ｄの半径は円Ｃの半径より小さいことを証明してください。

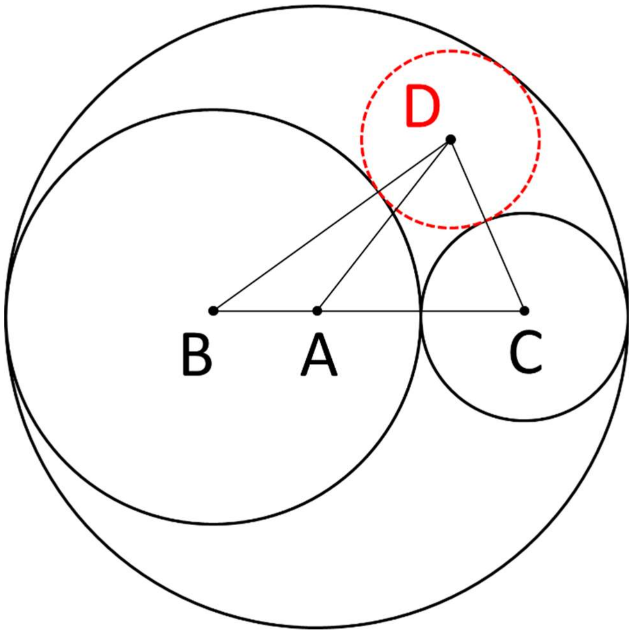
(3)【チャレンジ問題】

３つの円 B,C,D に同時に接する円のうち円Ａではないものを考え、これを円Ｅとします。

$x=2$のとき、円Ｅの半径を求めてください。

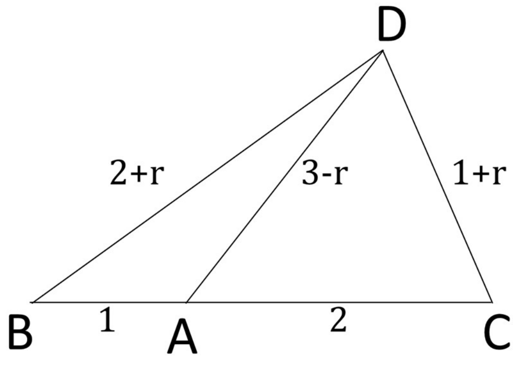
解説

「算額」っぽい問題を出してみました。



円の中心をそのまま A,B,C,D で表すことにします。

円 D の半径を r とすると、条件から BD= $2+r$, CD= $1+r$です。AD はすこし難しいですが、外側の円との関係を考えれば AD=$3-r$であることがわかります。したがって下のような図を考えられます。



あとはいくらでも好きなように解くことができます。数学 I で学習する余弦定理を使えば、

$$\cos\angle DAB = \frac{1^2+(3-r)^2-(2+r)^2}{2(3-r)}, \qquad \cos\angle DAC = \frac{2^2+(3-r)^2-(1+r)^2}{4(3-r)}$$

なので$\cos\angle DAB = -\cos\angle DAC$ から$r=\frac{6}{7}$ を得ることができます。

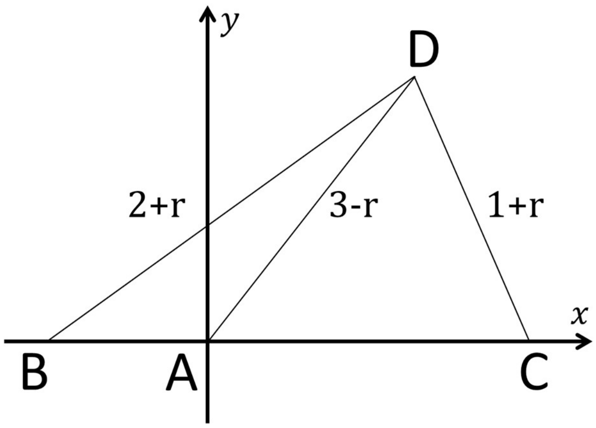
数学 II の知識を使って、座標で解くこともできます。

A(0,0), B(-1,0), C(2,0), D(a,b)とすれば

$$\begin{cases} a^2+b^2=(3-r)^2 \\ (a+1)^2+b^2=(2+r)^2 \\ (a-2)^2+b^2=(1+r)^2 \end{cases}$$

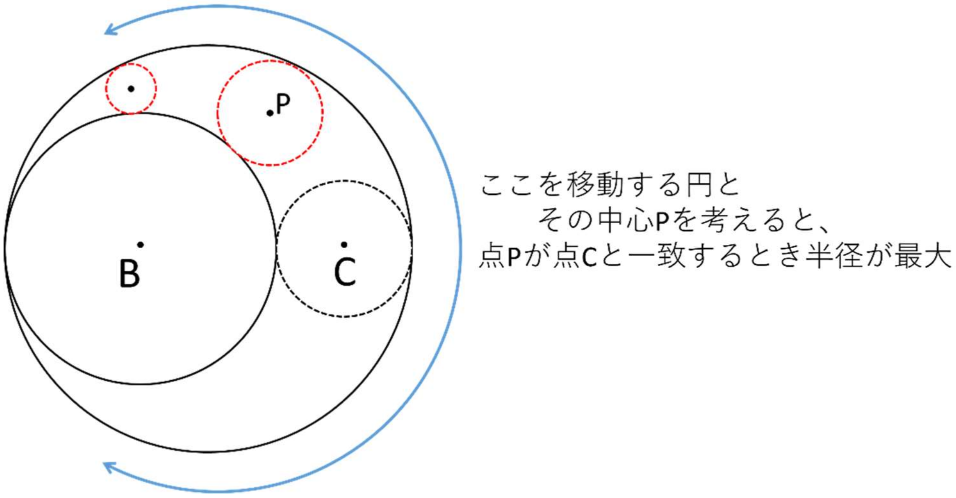
であり、$a=\frac{9}{7},\ b=\pm\frac{12}{7},\ r=\frac{6}{7}$ を得ることができます。

どちらの方法を使っても半径は$\frac{6}{7}$であることが示せます。



(2)についても、同様の方法で解くことができます。A(0,0), B(-1,0), C(x,0), D(a,b)として連立方程式を解けば$r=\frac{x^2+x}{x^2+x+1}$であり[1]、これは 1 より小さいです。

文字の入った連立方程式をとくのはキツイので、図形的に考えてみましょう。



図のように、点線で描かれた円が移動することを考えます。すると半径が最大になるのは点 P が点 C と一致するとき[2]なので、円 D の半径は円 C より小さいです。

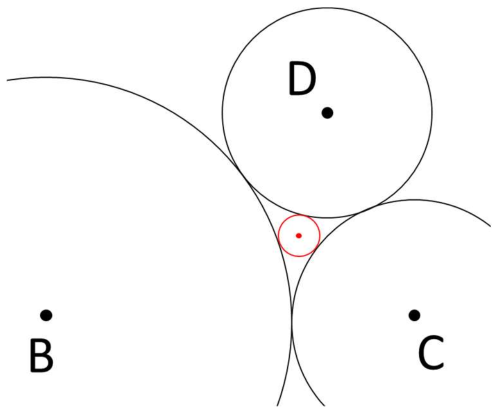
---

[1] $a=\frac{x^3+x^2-x-1}{x^2+x+1}$, $b=\pm\frac{2x^2+2x}{x^2+x+1}$

[2] A の半径のうち P を通るものを考える。この線分と円 B の交点を Q としたとき、円 P の直径は「円 A の半径－AQ の長さ」より短い。AQ が最短になるのは点 P が点 C と一致するときで、このとき円 P の半径が最大になるのは明らか。

最後に（3）を考えましょう。

円 E は図のような場所にあり、中心を E(a,b)、半径を r とすると



$$\begin{cases}\left(a-\frac{9}{7}\right)^2+\left(b-\frac{12}{7}\right)^2=\left(\frac{6}{7}+r\right)^2\\(a+1)^2+b^2=(2+r)^2\\(a-2)^2+b^2=(1+r)^2\end{cases}$$

が成り立つはずです。

これを（r>0 として）解くと$a=\frac{18}{17},b=\frac{12}{17},r=\frac{3}{17}$ となり

円 E の半径がわかりました。

さて、この問題は「円に関する反転」を用いても解くことができます。

これは、点 P を $\begin{cases}① & \text{点 } P' \text{は半直線 } OP \text{ 上にある}\\② & OP\times OP'=1\end{cases}$ を満たす点 P’と対応させる操作で、反転によって図形は「点 O を通らない円↔点 O を通らない円」「点 O を通る円↔直線」という対応をします。今回は円 B と C の接点を点 O として反転を行うと、考えている円が直線状に並んで考えやすいです。

「点 O を通らない円↔点 O を通らない円」の対応において、点 O を通る円の直径は同じく円の直径に対応するので、右の図で OE’と円 E’の交点を S’, T’とすると OS’=$\frac{\sqrt{145}-3}{8}$, OT’=$\frac{\sqrt{145}+3}{8}$となり、反転させると

OS=$\frac{8}{\sqrt{145}-3}$, OT=$\frac{8}{\sqrt{145}+3}$なので円 E の直径は OS−OT=$\frac{8}{\sqrt{145}-3}-\frac{8}{\sqrt{145}+3}=\frac{6}{17}$なので、半径が$\frac{3}{17}$とわかりました。

円に関する反転はいろいろ使える場面が多いので、試してみてください。