数学の課題研究に向けた課題発見能力育成事例集

京都府立洛北高等学校　藤岡翼

本校では第４期より、サイエンス Ⅰ（表１）において研究における実験調査の手法、データの収集と処理技術や科学的考察、課題発見能力の育成について行っている。

数学ではさらに
- 数学で課題研究をするとはどういうことか
- テーマをどのように作ればいいか
-

を伝えるようにしており、表２のような手順で行っている。本発表ではその具体的な内容について述べる。

また
- 生徒に数学の課題研究のイメージをつかませるのに役だった題材と指導案の略案の紹介
- 生徒の課題研究テーマのうち、こちらが授業で扱った題材を基にしたものの紹介

も行う。

表１　サイエンス科　課題研究の流れ

<table>
<tr><th colspan="3">中３・高１　サイエンスⅠ</th><th>高２　サイエンスⅡ</th></tr>
<tr><td rowspan="2">①　基礎実験　５分野
中３…生物、化学
高１…数学、物理、環境</td><td colspan="2">②　ミニ課題研究</td><td rowspan="2">③　課題研究</td></tr>
<tr><td>１回目</td><td>２回目</td></tr>
</table>

研究の手法、データの処理、課題の設定方法などを学ぶ

- 課題研究の基礎を身につける（異なる分野で２回行う）
- 数学はテーマ自由（他分野は基礎実験の内容に近いことを行う）

表２　サイエンスⅠ（数学）基礎実験の流れ

1	講義（話題の提供）
2	実験（１の内容）
3	セレンディピティ・セミナー（実験の考察、アイデアの共有、次回実験のテーマ決め）
4	実験（３の内容）

1　球の近似（平成 29 年）

このテーマでは近似を題材とし、まずは「球を多面体で近似する」ことを考えた。

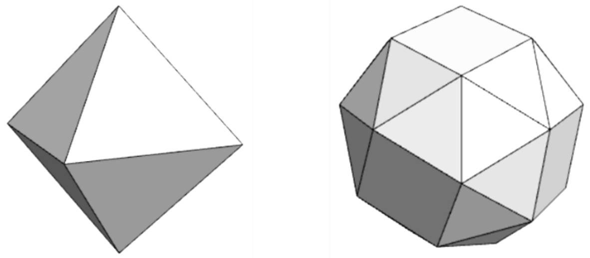

図１　右の多面体のほうが球に近いと考えられる

［１時間目…話題提供］

ジオデジック・ドーム等の球を多面体で近似している建築物の写真を見せ、「正多面体で球を近似するならどれがよいか」を考えさせた。

「多面体が球に近いとはどういうことか？」を生徒に考えさせたところ、表３のような解答が得られた。

外接球の半径を固定したとき
体積が外接球のものに近い
表面積が外接球のものに近い
ひとつの面の面積が小さい
辺の長さが短い
一辺の長さを固定したとき
体積が大きい
表面積が大きい
その他
二面角が大きい
頂点数、辺の数、面の数などが多い

表３　多面体が球に近いことの判断基準として考えられること

そこで、暫定的に基準として「外接球の半径に対する辺の長さが短い」ことを採用し、どの正多面体が球に近いかを考えさせた。すると概ね次の２つの『課題研究の仮説』が得られた。

> 仮説：外接球の半径が等しい正多面体のうち、一辺の長さが最短なのは $\begin{cases}\text{正十二面体}\\\text{正二十面体}\end{cases}$

計算および模型の測定で検証したところ、この基準においては正十二面体が球に最も近いことが分かった。

正二十面体の辺の長さが最短であると予想した生徒が多数であったため、数学Ａの授業としても盛り上がった。

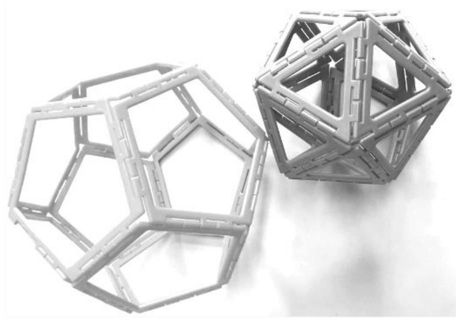

写真　「ポリドロン」で作成した模型

最初のテーマ：　外接球の半径が等しい正多面体　のうち、一辺の長さが最短のものは何？ ↓ 新しいテーマ：　外接球の半径が等しい<u>半正多面体</u>のうち、一辺の長さが最短のものは何？

１時間目の最後に、上記のように「解決済みのテーマを少し変えることで新しいテーマが作れる」ことを紹介した。半正多面体とは正多面体の条件を弱めて２種類以上の正多角形を用いることにしたもので、半正多面体の名称と構成する面の種類と個数の一覧を渡し、班ごとに仮説を立てさせた。

［２時間目…実験１］

前時の仮説を『計算』と『模型の測定』で検証したところ、この基準においては斜方切頂二十・十二面体（図２下）が球に最も近いことが分かった。

この立体を含む半正多面体の一覧の図を見せたところ、生徒からは「ほかの半正多面体のほうが球に近いように見える」という意見が出たので、はじめに暫定的に決めた基準が不適切だという可能性を考えさせた。

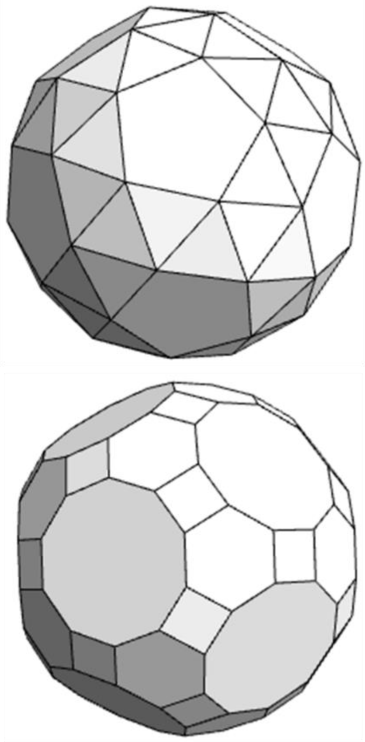

図２　ねじれ十二面体（上）と斜方切頂二十・十二面体（下）

［３時間目…セレンディピティ・セミナー］

１，２時間目に設定・考察した課題について、「どうやったらより球に近い建築物を作れるか」を意識しながら考察テーマを考えた。

生徒には既知の話題から少し変えることで検証しやすいテーマを作れることを伝え、実際に表４のようなテーマができあがった。班ごとにテーマを１つ選んで仮説を設定した。

1，２時間目で考えたテーマ			
半径の等しい球に内接する	正多面体	のうち、一辺の長さが最短のもの	は何？
半径の等しい球に内接する	半正多面体	のうち、一辺の長さが最短のもの	は何？
３時間目で生徒が考えた新しいテーマ（例）			
半径の等しい球に内接する	正多面体	のうち、**表面積が最大のもの**	は何？
半径の等しい球に内接する	正多面体	のうち、**体積が最大のもの**	は何？
半径の等しい球に内接する	半正多面体	のうち、**内接球の半径が最大のもの**	は何？
半径の等しい球に内接する	**各面が合同な立体**	のうち、一辺の長さが最短のもの	は何？
体積の等しい	半正多面体	のうち、一辺の長さが最短のもの	は何？

表４　３時間目（セレンディピティ・セミナー）で生徒が作ったテーマ

［４時間目…実験２］

前時の仮説を検証した。

仮説が成立した班と予想外の結果となった班が両方あらわれ、生徒は興味を示していた。最後に「真球度（Sphericity）」という概念を紹介した。半正多面体のうち Sphericity が最大なのはねじれ十二面体（図２上）であり、生徒の疑問も解決した。

［その後に生徒が考えたテーマ］

その後のミニ課題研究では、表４のうち検証できなかった仮説やより複雑なものについて検証する生徒や、近似を題材にして「$\log_{10} 2$の近似値を求める」「トーラスを多面体で近似する」などのテーマを考えた生徒がいた。

２　パスカルの三角形（平成 30 年度）

前節の「球の近似」は実験や計算の難易度が高かったため、仮説の検証がしやすい題材を採用した。またセレンディピティ・セミナーにおけるテーマ選びも想像より難航したため、１時間目に話題提供・２時間目に実験をするスタイルを少し崩して、２時間目にもテーマの紹介をした。

基礎講義の大きな目的は課題研究のテーマ作りを学ぶことなので（表１を参照)、「パスカルの三角形を題材にテーマづくりを学ぶ」ことを主目的とし、パスカルの三角形について雑多なトピックを紹介した。

［１時間目：話題提供］

数学Ⅰと数学 II で学習したパスカルの三角形について復習し、パスカルの三角形が多項式$(x+1)^n$を展開したときの係数を並べたものであること、二項係数であること、右上と左上の数字を足したものであることを確認した。

また、パスカルの三角形の各数字を mod２で塗りわけさせた。つまり異なる２つの色を用いて、偶数と奇数のマスを塗りわけさせた（図８左)。

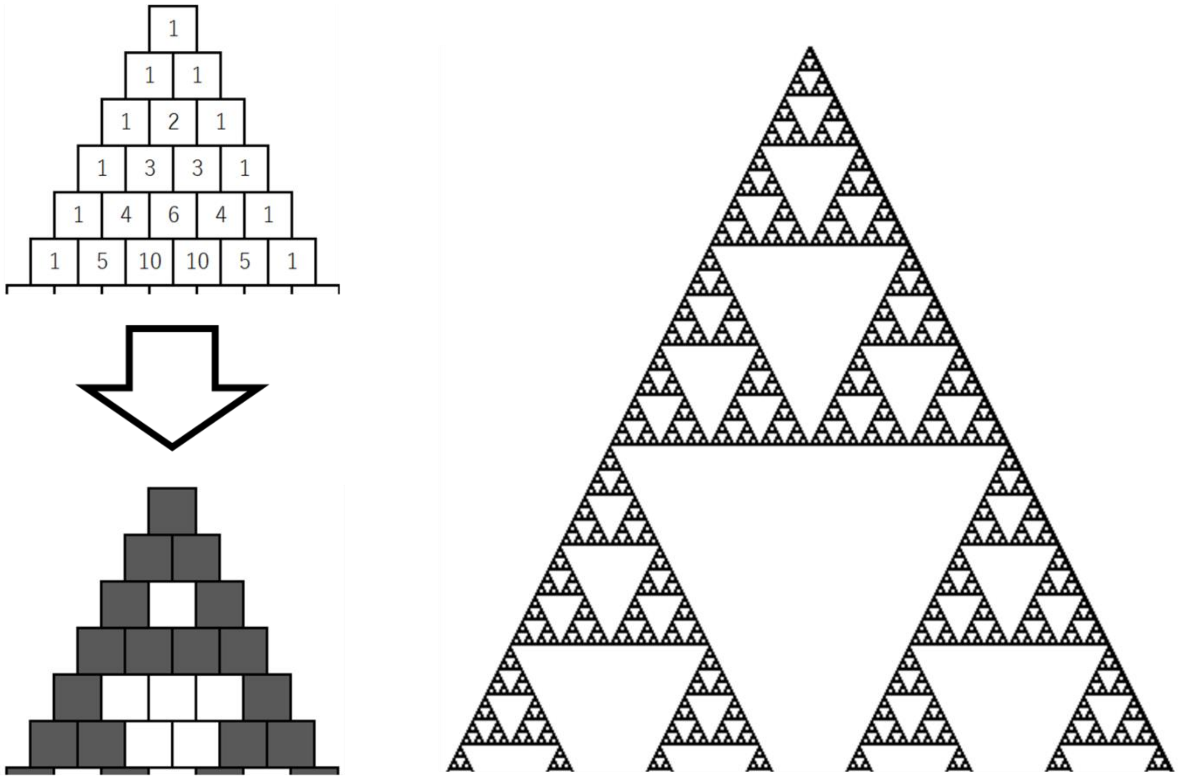

図３　パスカルの三角形を塗りつぶす様子と、フラクタル図形が現れる様子

塗りわけた図形を得るためには、二項係数 ${}_nC_k$ の値ではなくその偶奇のみがわかればよいので、８段目まで塗ったところで mod２での計算

$$\begin{cases} 0+0\equiv 0 \\ 0+1\equiv 1 \\ 1+0\equiv 1 \\ 1+1\equiv 0 \end{cases}$$

が有効であることを確認した。

さらに、16 段目まで塗ったところで自己相似（フラクタル）の構造が現れていることを確認して、32 段目まで塗らせた。図８の右のような図形が現れ、これはシェルピンスキーのギャスケットの近似となる。１時間目は、その後 mod３での塗りわけと mod５の塗りわけを行った。

［２時間目：実験１・話題提供］

１時間目に引き続いてパスカルの三角形を mod４と mod６で塗りわけさせた。

塗る前にどのような形になるか仮説を立てさせたところ、半数程度の生徒が mod２，mod３，mod５と同様の規則が現れると予想した。しかし残りの生徒は、(こちらが素数と合成数を分けて扱ったのを感じ取ったのか）何か別の規則が現れるだろうと予測した。

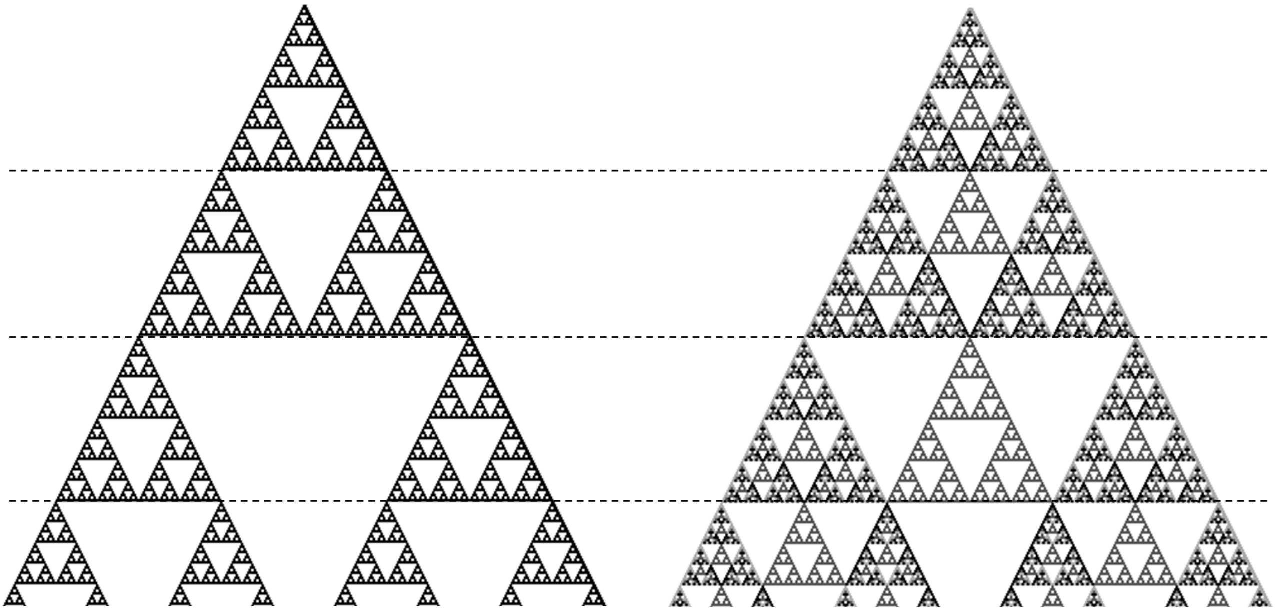

図４　mod４での塗りわけ（右）は、mod２での塗りわけ（左）と似た構造を持つ

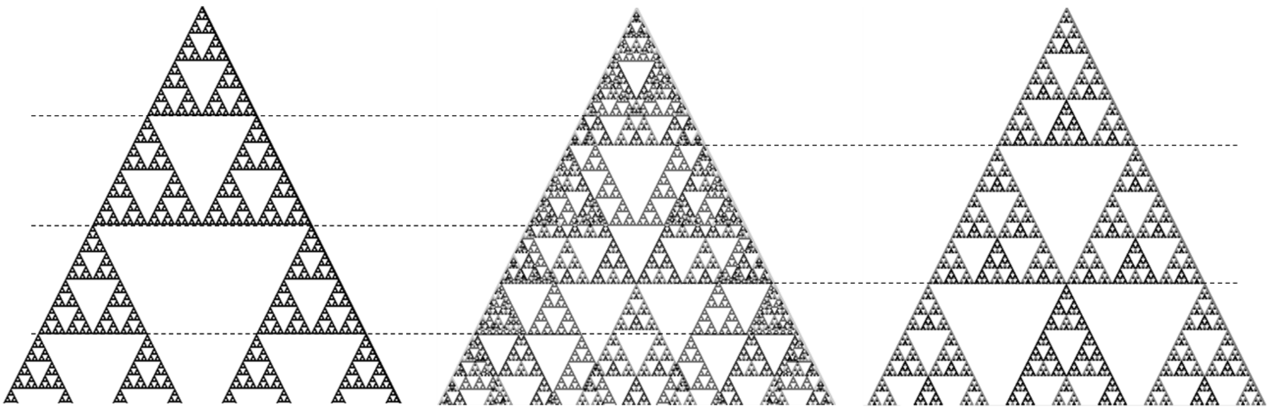

図５　mod６での塗りわけ（中央）は、mod２での塗りわけ（左）とmod３での塗り分け（右）をあわせた構造を持つため、自己相似の性質を持たない

実際、mod４で０となる場所（白い場所）は mod２でも０であり、mod２で黒く塗られた場所は mod４でも色を塗る必要があるため、mod２と同様の構造が現れる。mod4 での塗りわけは自己相似の性質を持つ（図４）。

mod６での塗りわけは、mod２と mod３のどちらかで色を塗った部分をすべて塗らないといけないので、自己相似の構造は現れない（図５）。

塗りわけた結果について班で議論させた結果、mod６の塗りわけがmod２とmod３の塗りわけをあわせた構造になっていることはどの班も短時間でたどり着いた。

それぞれの塗りわけはＡ３判の普通紙に行ったため、mod２とmod３の紙を重ねて光に透かすことでmod６の塗りわけと同じものを得ることができる。

平成29年度のときと同じく「解決済みのテーマを少し変えることで新しいテーマが作れる」ことを紹介するため、$(x+2)^n$を用いたパスカルの三角形について扱った。

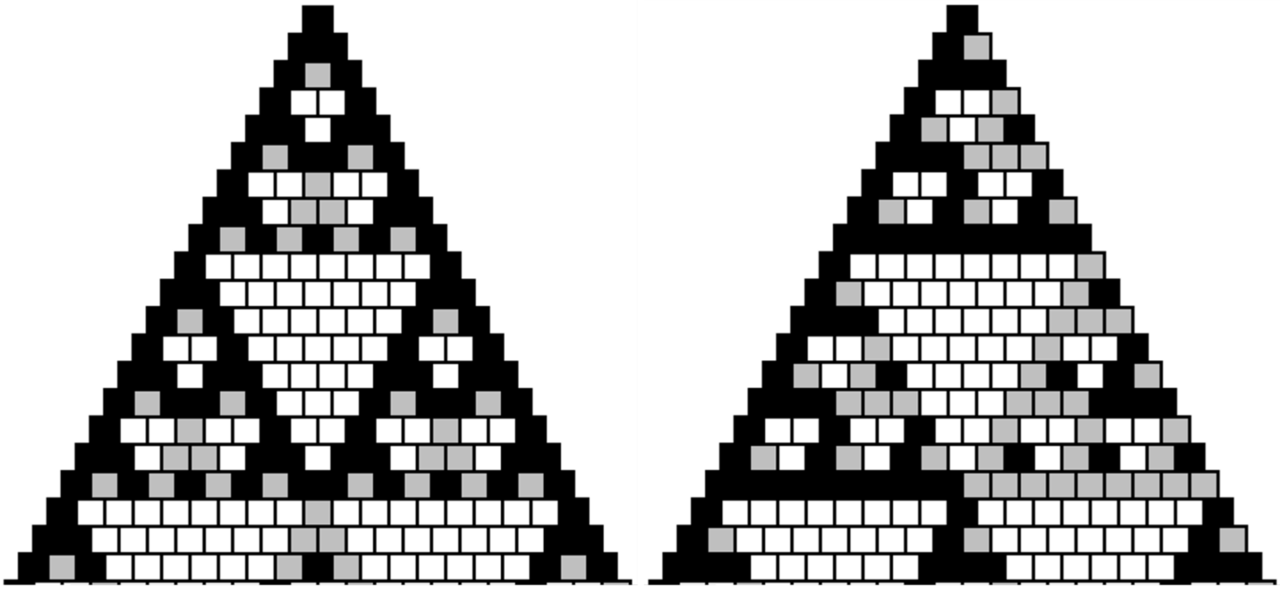

図６　通常のパスカルの三角形のmod３での塗りわけ（左）と
$(x+2)^n$ を用いたパスカルの三角形のmod３での塗りわけ（右）

$(x+1)^n$の展開から作れる通常のパスカルの三角形と、$(x+2)^n$から作る三角形を mod３で塗りわけると、似た構造が現れる（図６）。特にmod３で１である場所と２である場所を両方塗ったとき、両者は同じになる。

その他テーマづくりに役立てるため、通常のパスカルの三角形について各列の合計を計算すると2^nが現れること、ナナメ方向に足すとフィボナッチ数列が現れることなどを紹介した。

［３時間目…セレンディピティ・セミナー］

１，２時間目に設定･考察した課題について、考察のしやすいテーマと仮説を班ごとに考えさせた。

テーマを作りを目的とした題材なので、前年度の「球の近似」よりもスムーズにたくさんのテーマが出た。以下に例を挙げる。

- パスカルの三角形をmod８，mod16，…で塗りわけるとどうなるか
- $(2x+1)^n$や$(x-1)^n$を用いてパスカルの三角形を作るとどうなるか
- パスカルの三角形を三角錐に拡張するとどうなるか
- $(x+2)^n$のパスカルの三角形をmod５で塗りわけると、$(x+1)^n$と比較して色はどうなるか

特に最後のテーマについては、１，２時間目に紹介した話題の構造を見抜いたうえで非自明と思われる例をうまく見つけてきてくれた。生徒によっては簡単に結果や背後の構造が理解できてしまうため、簡単な題材だとテーマを見つけるのは難しいということもわかった。

［４時間目…実験２］

前時に作った仮説を班ごとに検証した。当初の思惑通り比較的短時間で実験が終わったため、考察及びまとめの時間を多くとることができた。

［その後に生徒が考えたテーマ］

その後のミニ課題研究（表１②）でパスカルの三角形をテーマにした生徒はあまりいなかった。ミニ課題研究では全員が数学分野を選ぶわけではないので、数学を選択するくらい数学力のある生徒はこの題材からテーマを見つけるのが難しかったのだと推測される。

３　記数法（平成 30 年度）

サイエンスＩの基礎実験（表１①）ではないが、通常の枠組みの数学の授業で扱った題材について述べる。数学Ａ「整数の性質」の分野における「ｎ進法」の授業のあとに、３時間かけて発展的内容の授業を行った。

ｎ進法で表された数　$a_k a_{k-1} \dots a_2 a_1 a_{0(n)}$　に対してｎを「底」、a_iを「仮数」といい、仮数は集合$A = \{0, 1, 2, \dots, \mathrm{n}-1\}$から選ぶ。この「底」と「仮数」を変化させる方法が、教科書以外にも多くあることを説明し、生徒にもその例を考えさせた。

［１時間目：話題提供］

まず位取り記数法について確認した。

その後、$n = -2,\ A = \{0, 1\}$としたマイナス２進法を紹介した。マイナス２進法は、たとえば

$$-2019 = 100001101101_{(-2)}$$

のように、負の数を符号なしで表すこともできる。

その他、位取り記数法ではなく、底が桁ごとに変化する記数法も紹介した。

たとえば日本円などは一円、五円、十円、…と底が２と５を交互に繰り返す。

階乗進法（表５）は底が 1, 2, 3, 4…と変化するもので、n!が 100…0 という形で書けるほか、任意の有理数が有限小数で書ける。また、ネイピア数ｅが$\mathrm{e} = 10.0111111 \dots$と循環小数になるのも特徴である。

10進法	階乗進法
0	0
1	10
2	100
3	110
4	200
5	210
6	1000
7	1010
8	1100
9	1110
10	1200
11	1210
12	2000
13	2010
14	2100
15	2110
16	2200

10進法	階乗進法
17	2210
18	3000
19	3010
20	3100
21	3110
22	3200
23	3210
24	10000
120	100000
720	1000000
5040	10000000
1/2	0.01
1/3	0.002
1/4	0.0012
1/10	0.00022
1/24	0.0001
e	$10.0\dot{1}$

表５　10進法と階乗進法の対応。階乗進法においては、ｋ桁目および小数第ｋ位の仮数は$\{0, 1, \dots, k-1\}$から選ぶ。

さらに

- 底が$\mathrm{n} = 3$、仮数の集合が$\mathrm{A} = \{-1, 0, 1\}$である「平衡三進法」
- 底が$\mathrm{n} = 2$、仮数の集合が$\mathrm{A} = \{-1, 0, 1\}$である「冗長二進法」

についても紹介した。

最後に、日本語と英語での数の命名（命数法）がそれぞれ10^4進法と10^3進法になっていることを確認した（表６）。「億万長者」や「ミリオネア」という言葉に大きな数に対するイメージが表れることや、世界には５進法や１５進法を用いる言語もあるなど文化によって数の数え方が変化することなどを伝えると、生徒は前ページの記数法の紹介より興味深く聞いていたように思える。

日本語	
10の4乗	一万
10の8乗	一億
10の12乗	一兆
10の16乗	一京
10の20乗	一垓
10の24乗	一秭

英語	
10の3乗	one thousand
10の6乗	one million
10の9乗	one billion
10の12乗	one trillion
10の15乗	one quadrillion
10の18乗	one quintillion

表６　日本語と英語による10のｎ乗の表現

［２時間目：実験］

１時間目の内容に加え、ローマ数字・インド数字・マヤ数字など数字の表し方にもいろいろあることを伝え、「数のない世界に行ったとして、現地の人たちに数を教えなさい」という設定で独自の記数法を考えさせた。

「オリジナルの数字を考える」だけなら小学生でもできる内容なので、前時までに学習した内容を使い、できるだけオリジナリティのある記数法を考えさせた。生徒は

- 外側へ広がっていく数字
- 上や下に長くなっていく数字
- 9 進法や 11 進法を使った数字

など、様々なものを考えた。その後で 120×450 の計算をさせることで、結局のところ位取り記数法での計算に帰着することを学習した。

［３時間目：話題提供］

前時に作成した数字のうち、面白かったものを全員に共有した。

そのほか、たとえば連分数展開$\sqrt{2} = [1; 2, 2, 2, 2, \ldots]$や$\pi = [3; 7,15, 1, 292, \ldots\ ]$も数を指定する方法であるから記数法として用いることが可能なこと、p 進数体$\mathbb{Q}_p$を紹介して記数法を変えることで新たな数学の世界が見えてくることを教えた。

［その後に生徒が考えたテーマ］

平成 30 年度のミニ課題研究（表１②）では、記数法の話題を考えた生徒が何名かいた。

「底が３，仮数の集合が$\{0, 2\}$」である記数法Ａおよび「底が３，仮数の集合が$\{0, 1, 2, 3\}$」である記数法Ｂを考え、通常の３進法と比べてどのようになるかを考えた。特に記数法Ａはカントールの三進集合（図７）を自力で発見するなど、興味深い結果を得ることができた。

図７　カントールの三進集合。区間$[0, 1]$に含まれる実数のうち記数法Ａで表せるもの全体。

４　本校の今後の方針

令和元年度は、過年度と同様の目的でハノイの塔を題材に基礎実験（表１①）を行っている。
生徒が課題研究のテーマを数学分野から選択するにあたり、どのような力が必要なのか今後も探っていく予定である。
またこれまでに検討したが難易度の関係で廃案となった題材や、SSH 第 3 期以前に行っていた題材についても、いずれ発表していく。

また、科目「数学探究」に向けて課題設定や数学の活用能力を育てるイベントを企画中であり、発表やイベントを通じて他校にも本校の研究内容を共有していくつもりである。