3

【出題の意図】

多項式の因数分解は整式の変形の基本であるとともに、高次方程式の解法においてたいへん重要です。高等学校では、多項式の因数分解について、適当な式変形をして２次式などに帰着する手法や、因数定理の学習をしますが、すべての整式がこのような手法だけで、容易に因数分解できるとは限りません。しかし、教科書の練習問題を解く限りでは、これらの手法の特徴を際だたせる問題で練習するわけですから、どんな場合にも有効であるような気分になってしまう生徒もいるようです。

当然、いつかはこれらの手法で因数分解が難しい場合に遭遇するわけですが、できないと言って投げ出してしまわないで、二の矢、三の矢のアイデアを考え、なんとか因数分解できないものかと頑張る姿勢が求められます。

本問題に関しては、$p(x)-Q(x)$のように差をとって、次数を下げてから因数分解の可能性を探る方法や、$p(x)$の構造に着目して、$(x^2+ax+1)(x^2+bx+3)$と因数分解できるのではないかと考えて、係数の満たす条件を求める方法などが思いつきます。更に、両式の差を取る手法の発展として、「ユークリッドの互除法」の応用にたどり着くでしょう。問題の解法では、とにかく持っている知識を総動員していろいろとやってみることが何よりも大切です。

本問題では、２本の簡単な４次式の因数分解をテーマに、いろいろとアイデアを出しながら、チャレンジしてもらうことを出題の意図としています。

【講評】

結果は、Ａランク（正解）22名、Ｂランク（正解近くまで行った生徒）10名、Ｃランク（半分くらいまで行った生徒）19名、Ｄランク（ほとんどできなかった生徒）133名でした。

Ａランクの生徒１名がユークリッドの互除法を用いて鮮やかに最大公約数を求めた以外は、$p(x)-Q(x)$ルートと、$p(x)$の構造に着目して$(x^2+ax+1)(x^2+bx+3)$のように因数分解できるのではないかと考えて、係数の満たす条件を求めるルートが半分ずつくらいの割合でした。一方で、約７割の生徒が、解法の糸口を見つけられないままでした。因数定理を適用しようとして、いくつかの数を代入したのに、結果が０にならないので断念した生徒も多くいました。何かの役に立たないかと微分し、導関数を求めた生徒も散見されました。

何とか手がかりを見つけられた生徒の多くが、最大公約数と最小公倍数までたどり着けたのに対して、手がかりを見いだせなかった生徒は、全く先に進めず歯がゆい思いをすることとなったようです。

できなかった人は、この思いを今後の勉強に反映し、各種手法の特徴と限界、そして整数の世界で多用される「ユークリッドの互除法」などに興味を持って、日頃の学習を深めてほしいと考えています。