ユークリッドの互除法

２つの数ｘ＝ 3960 とｙ＝ 4200 の最大公約数ＧＣＭと最小公倍数ＬＣＭを求めることを考えましょう。両者を素因数分解してみますと、次のとおりです。

$$x = 3960 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^1 \cdot 11^1$$
$$y = 2100 = 2^2 \cdot 3^1 \cdot 5^2 \cdot 7^1$$

$$GCM = 2^2 \cdot 3^1 \cdot 5^1 \cdot 7^0 \cdot 11^0 = 60$$
$$LCM = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^1 \cdot 11^1 = 138600$$

ＧＣＭは、両者を共に割り切ることのできる最大の数ですから、ｘ，ｙを構成するそれぞれの素数に着目して、指数の小さい方を選んで積を作りますと 60 が得られます。

ＬＣＭは、両者が共に割り切ることのできる最小の数ですから、ｘ，ｙを構成するそれぞれの素数に着目して、指数の大きい方を選んで積を作りますと 138600 が得られます。

この方法は最大公約数や最小公倍数を求めるための唯一無二の手法のように思えますが、現実的には苦しい場面もあるのです。

それでは、２つの数 4087 と 4331 の最大公約数や最小公倍数を求めてみましょう。電卓を片手にトライしてみてください。両者を素因数分解しようと思ってもなかなか苦労を強いられますね。正解は、

$$4087 = 61 \times 67$$
$$4331 = 61 \times 71$$

ですから、

$$GCM = 61$$
$$LCM = 61 \times 67 \times 71 = 290177$$

となります。

この程度の大きさの数ですら、電卓を使っても手こずるのですから、もう少し桁数の多い数の問題に対しては、現実的に手計算では困難な状況に追い込まれてしまいます。こんなとき頼りになるのが互除法です。これは、対象とする２数を、

「大きい数」÷「小さい数」＝「商」･･･「余り」

の計算をし、対象とする２数を「小さい数」と「余り」に置き換えて作業を進めていき、扱う２数を絶対値がどんどん小さくなっていく中で、割り切れるということになった段階で、その割った方の数が最初の２数の最大公約数というわけです。

先ほどの例によりますと

		商	余り	
(i)	4331 ÷ 4087 ＝	1	････244	
(ii)	4087 ÷ 244 ＝	16	････183	
(iii)	244 ÷ 183 ＝	1	････61	
(iv)	183 ÷ 61 ＝	3	････０	（割り切れます。）

これにより、4331 と 4087 の最大公約数は 61 となります。

２数ａ，ｂについてのＧＣＭを、ＧＣＭ（ａ，ｂ）と表現することにしますと、

ＧＣＭ（4331，4087）＝ＧＣＭ（4087，244）＝ＧＣＭ（244，183）

＝ＧＣＭ（183，61）　＝ 61

となります。

それでは、この手順をたどりながらどうして最大公約数が出てきたのか理由を考えてみましょう。先ほどの４本の式は、計算手順は示してくれますが、数学的には等式の方が正確に表現されますので、表現しなおすと次のようになります。

（i）'　　$4331 = 4087 \times 1 + 244$

（ii）'　　$4087 = 244 \times 16 + 183$

（iii）'　　$244 = 183 \times 1 + 61$

（iv）'　　$183 = 61 \times 3 + 0$　　（割り切れます。）

これらを一見しても分ることですが、61 という数によって（i）' から（iv）' までのすべての項が割り切られているということです。よって、４つの式を通じて 61 は公約数になっています。そして、（iv）' からも分るように、61 は公約数の中でも最大のものになっているらしいことも伝わってきます。

互除法のもととなる定理は次のものです。

【定理】

自然数ａを自然数ｂ（ａ＞ｂ＞０）で割ったとき、商がｑで、余りがｒとするとａとｂの最大公約数Ｇと、ｂとｒの最大公約数ｇは一致する。

この定理を繰り返し適用して、２つの数の最大公約数を求める手法が互除法と呼ばれるものでした。互除法は、古代ギリシアの数学者の名をいただき「ユークリッドの互除法」とも呼ばれ、２数の最大公約数を求めるとき、古くから親しまれている手法です。