５

右の図１は，１辺の長さが２の正二十面体である。

この立体において，頂点Aから他のすべての頂点までの距離を，それぞれ２乗した総和を求めなさい。

ここで，頂点間の距離とは，２つの頂点間の最短距離とする。たとえば，右下の図２のような立方体 ABCD－EFGHにおいて，頂点Aから頂点Gまでの距離は，線分AGの長さのことである。

図１

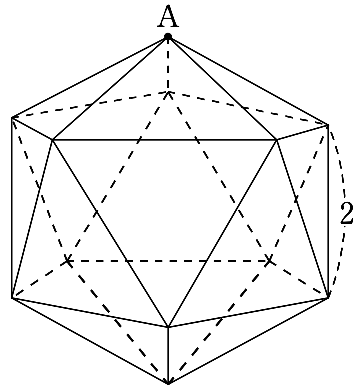
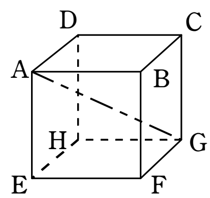


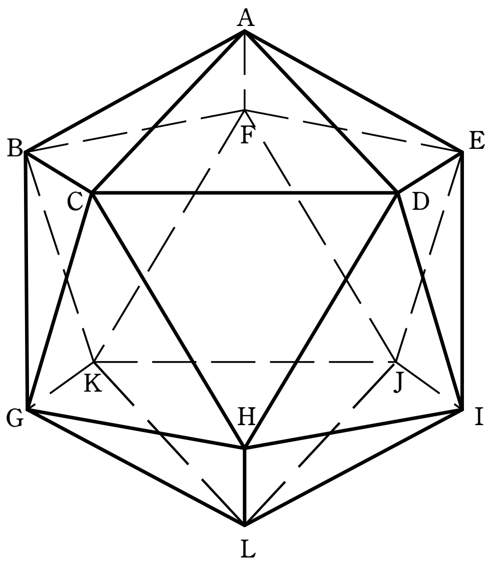
図２



解答

各頂点を図のように A～L とし，

頂点 A から各頂点までの距離を求める。



正三角形の１辺であるので，

AB＝AC＝AD＝AE＝AF＝2

正五角形 ABGHD において

対角線 AG，BD の交点を M とする

△AGH はAG＝AH の二等辺三角形で

BD∥GH より　∠AGH＝∠GMB

BG∥AH より　∠GAH＝∠BGM

２角が等しいので　△AGH∽△GBM

よって　△GBM は二等辺三角形であり

GB＝GM＝2

対角線 $AG=x$ とおくと

$\triangle MAB$ は二等辺三角形なので

$$MA=MB=x-2$$

ここで　$\triangle MAB \backsim \triangle BGA$ なので

$$MA:AB=BG:GA$$

よって　$(x-2):2=2:x$

$$x(x-2)=2^2$$

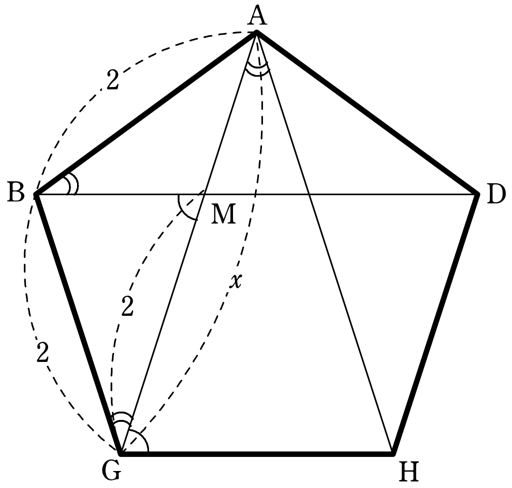
$$x^2-2x-4=0$$

$$x=1\pm\sqrt{5}$$

$x>0$ より　　$x=1+\sqrt{5}$

よって　　$AG=1+\sqrt{5}$

したがって，$AG=AH=AI=AJ=AK=1+\sqrt{5}$



次に，この正二十面体は AL を直径とする球に内接しているので，3 点 A，K，L を通る平面でこの球を切ると，
断面は AL を直径とする円となる。
点 K はこの円周上にあるので，

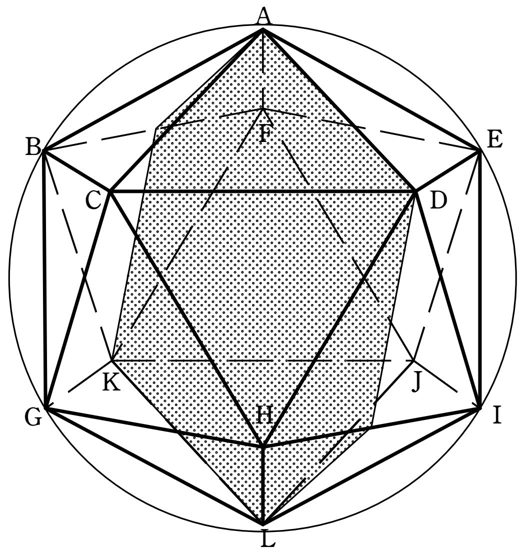
$$\angle AKL=90°$$

すなわち　$AK\perp KL$　であるから

$$AL^2=AK^2+KL^2$$

$$=(1+\sqrt{5})^2+2^2$$

$$=1+2\sqrt{5}+5+4=10+2\sqrt{5}$$



以上より　頂点 A から各頂点までの距離の平方の和は

$$5\times AB^2+5\times AG^2+AL^2$$

$$=5\times 2^2+5\times(1+\sqrt{5})^2+(10+2\sqrt{5})$$

$$=20+30+10\sqrt{5}+10+2\sqrt{5}$$

$$=60+12\sqrt{5}$$　………………（答）