

理論問題

京都物理コンテスト 2011
2011 年 11 月 20 日

注意事項

- * 指示があるまでこの冊子は開けないこと。
 - * 解答時間は 1 時間である。解答は解答用紙に記入すること。
 - * 解答用紙は 1 枚である。
 - * 解答用紙には、受験番号・氏名を記入すること。
 - * この冊子はコンテスト終了後は持ち帰ること。
-

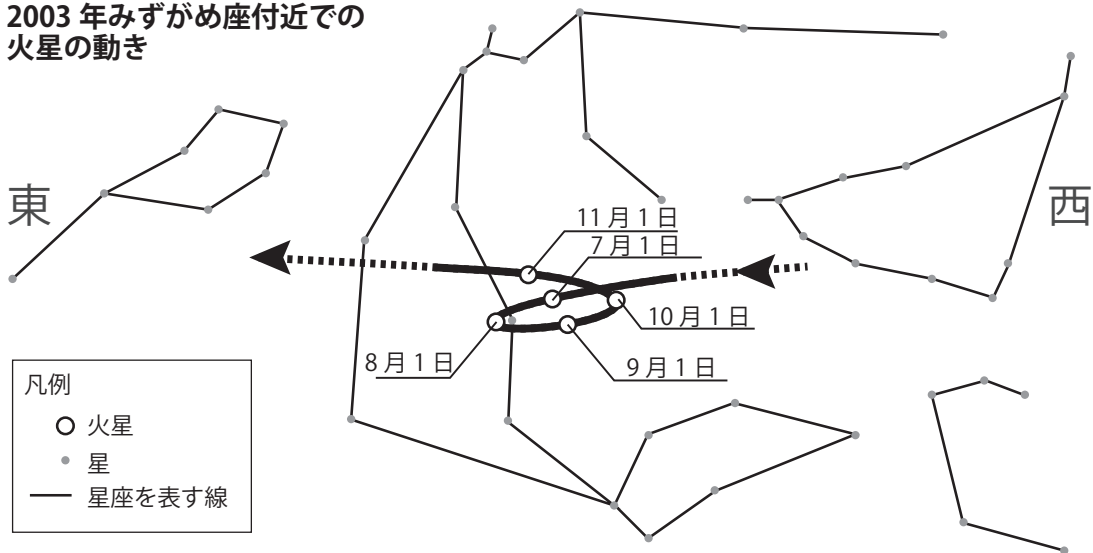
第 1 問 (力学)

古代から夜空の星の動きは、人類の関心の的でした。星の動きについて考えてみましょう。

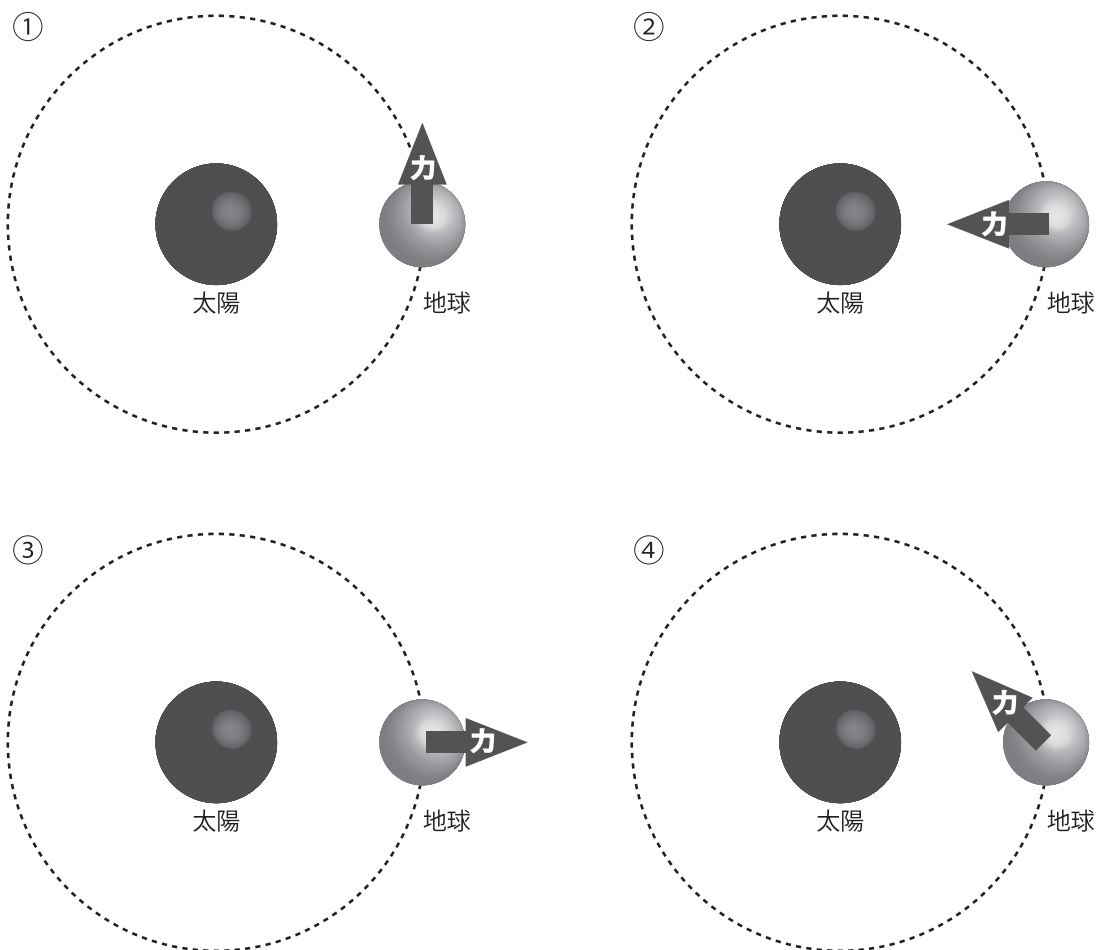
問 1 2003 年は火星が地球に大接近した年でした。このとき、火星は 7 月から 11 月にかけて不思議な動きをしたことが知られています。みずがめ座に対して火星は、下図のように、西から東に動いてきて、8 月から 10 月までは東から西に動き、10 月以降は西から東に動いたように見えました。この理由として最も適切なものを以下の ①～④ のうちから一つ選びなさい。

- ① 火星は太陽に対して、公転方向を変える場合があるため。
- ② 地球の公転のため。
- ③ 地球の自転のため。
- ④ 地球の大気の揺らぎの影響のため。

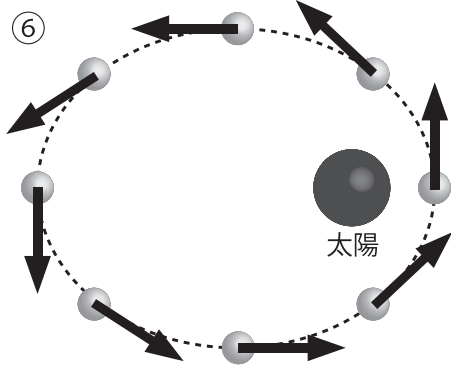
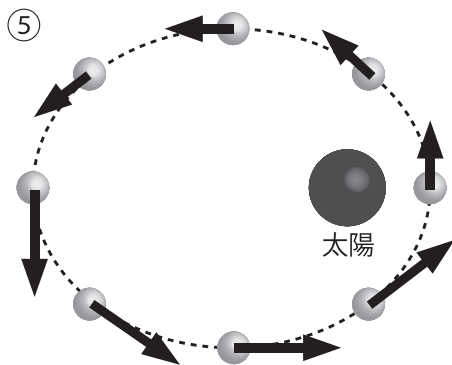
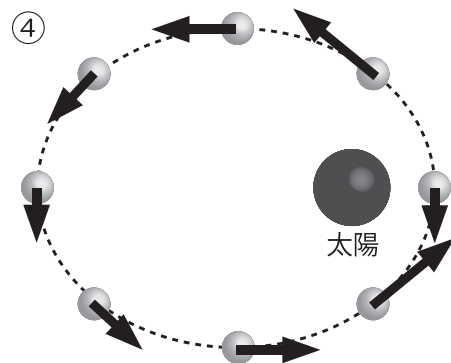
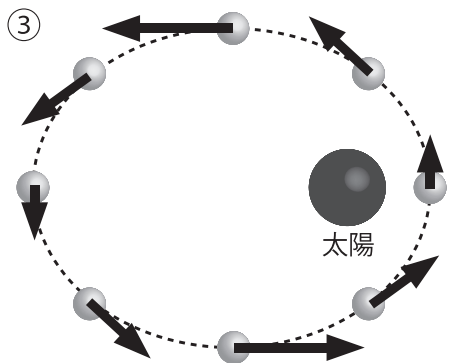
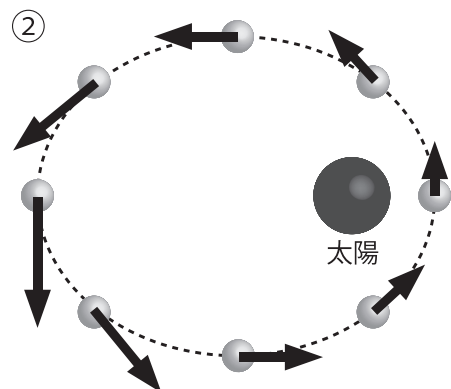
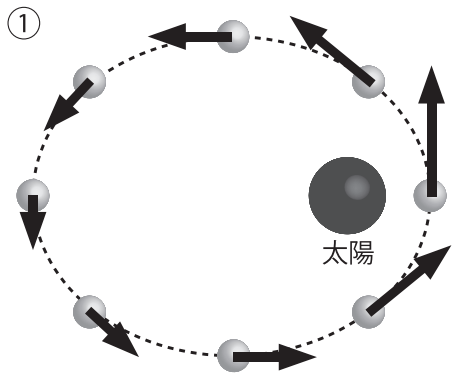
2003 年みずがめ座付近での
火星の動き



問2 太陽と地球の間には、万有引力の法則に従って力が働いています。この力によって地球は太陽の周りを公転しています。太陽が地球におよぼす力の向きとして、最も適切なものを以下の①~④のうちから一つ選びなさい。



問3 惑星の運動を詳しくみると、円軌道ではなく楕円軌道を描いており、惑星は太陽の近くを動いている場合と、遠くを動いている場合があります。それでは、この運動を表す模式図として、最も適切なものを以下の図の①~⑥のうちから一つ選びなさい。ただし、ここでは、矢印の向きは惑星が進む向き、矢印の長さは速さを表しており、矢印が長いほど速い動き、短いほど遅い動きを表すものとしします。



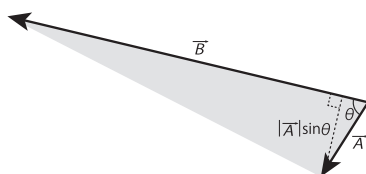
問 4 大きな質量をもつ星の周りを公転する惑星の運動を考察しましょう。たとえば、太陽の周りでの地球の運動を考えてみましょう。まずは、この運動の考察に必要な数学について述べます。最初に微分と呼ばれる演算について、次に外積ベクトルについて性質を調べてみましょう。

問 4 (1) 微分は変化率を求めるもので、時間による変化率は、文字の上に黒い点をつけて表します。たとえば、量 $\vec{A}$ の時間変化率は、 $\dot{\vec{A}}$ と表します。このように量の表し方を決めると、物体の位置を $\vec{r}$ としたときには、位置の時間変化率、すなわち速度は $\dot{\vec{r}}$ であり、速度 $\vec{v}$ の変化率、すなわち加速度 $\vec{a}$ は、 $\dot{\vec{v}}$ と表されます。

$\vec{a} = \vec{0}$ のときに、物体はどのような運動をしているのか最も適切なものを以下の ①～④のうちから一つ選びなさい。

- ① 加速度 $\vec{a}$ は時間によらず一定で、等加速度運動。
- ② 加速度の時間変化率 $\dot{\vec{a}}$ は時間によらず一定で、等速円運動。
- ③ 位置 $\vec{r}$ は時間によらず一定であり、常に $\vec{r} = \vec{0}$ が成立し、等速度運動。
- ④ 位置 $\vec{r}$ は時間によらず一定で、位置が一定。

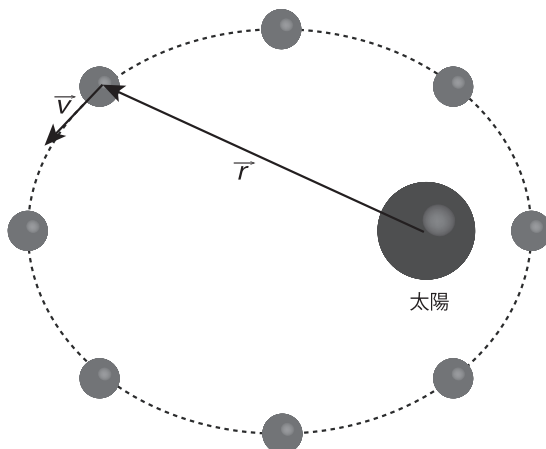
問 4 (2) 次に外積ベクトルについて性質を調べてみましょう。ベクトルの外積は $\times$ を使って表します。つまり、ベクトル $\vec{A}$ とベクトル $\vec{B}$ の外積ベクトル $\vec{C}$ は、 $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$ と表記されます。ベクトルの外積の大きさ $|\vec{C}|$ は、 $|\vec{C}| = |\vec{A}||\vec{B}|\sin\theta$ で表され、これはベクトル $\vec{A}$ と $\vec{B}$ を二辺とする三角形の面積を 2 倍にしたものです。ここで θ は、 $\vec{A}$ と $\vec{B}$ とのなす角度です。このように定義すると、 θ が 0° もしくは 180° のときには、 $|\vec{C}| = 0$ となります。また、 $\theta = 90^\circ$ のときには最大値をとります。



位置ベクトル $\vec{r}$ と速度ベクトル $\vec{v}$ を質量 m 倍したベクトル $m\vec{v}$ との外積ベクトル $\vec{L}$ は次のように書けます。

$$\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v}$$

ここで位置ベクトルの始点を太陽の中心とします。 $\vec{r}$ と $\vec{v}$ を図示したものを次に示します。



一般に、ベクトル $\vec{A}$ とベクトル $\vec{B}$ の外積ベクトル $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$ を微分するとき、

$$\dot{\vec{C}} = \dot{\vec{A}} \times \vec{B} + \vec{A} \times \dot{\vec{B}}$$

が成立します。この関係を用いて、 $\vec{L}$ の時間変化率を計算すると、

$$\dot{\vec{L}} = \dot{\vec{r}} \times m\vec{v} + \vec{r} \times m\dot{\vec{v}}$$

となります。ここで $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$ なので、ベクトル $\dot{\vec{r}}$ とベクトル $m\vec{v}$ ベクトルのなす角度は 0 です。よって外積ベクトル $\dot{\vec{r}} \times m\vec{v}$ は大きさ 0 で、

$$\dot{\vec{L}} = \vec{r} \times m\dot{\vec{v}}$$

であることが分かります。

惑星が太陽から受ける万有引力を $\vec{F}$ とするとき、上式に運動方程式を適用して得られる式として、最も適切なものを以下の ①～④ のうちから一つ選びなさい。

$$\text{① } \dot{\vec{L}} = \vec{r} \times \vec{v} \quad \text{② } \dot{\vec{L}} = \vec{r} \times \vec{v} \quad \text{③ } \dot{\vec{L}} = \vec{r} \times \vec{F} \quad \text{④ } \dot{\vec{L}} = \vec{v} \times \vec{F}$$

問4(3) 問2の答えより、 $\vec{r}$ と $\vec{F}$ の関係を用いると、 $\vec{L}$ の時間変化についての情報が得られます。最も適切なものを以下の ①～④ のうちから一つ選びなさい。

$$\text{① } \dot{\vec{L}} = \vec{0} \quad \text{② } \vec{L} = \vec{0} \quad \text{③ } \dot{\vec{r}} = \vec{0} \quad \text{④ } \dot{\vec{v}} \times m\vec{v} = \vec{0}$$

第 2 問 (熱力学)

私たちが日常的に見ている太陽は光エネルギーや熱エネルギーなどを約 50 億年もの長時間にわたって生み出し続けていて、地球上の生物はこのエネルギーを直接的、間接的に利用して生きています。太陽が長期間エネルギーを安定的に生み出していける理由を熱力学的な観点から考察してみましょう。

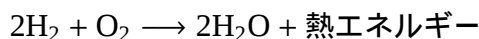
問 1 ペットボトルに 15 ℓ の水が 500 g 入っているとします。晴れた日にこのペットボトルをしばらく外に置いて、水が太陽などから 21000 J の熱量を得たとすると、水の温度は何度になりますか？最も適切なものを以下の ①~④ のうちから一つ選びなさい。ただし水 1 g の温度を 1 ℃ 上げるのに必要な熱量は 4.2 J とします。

- ① 5 ② 25 ③ 30 ④ 45

水がエネルギーを吸収して温度が上昇すると水分子の運動が激しくなります。この分子の運動を熱運動といい、温度は熱運動の激しさを表す指標となります。

次に、太陽が生み出すエネルギーについて考えてみましょう。太陽のエネルギー源は内部で起こる核融合反応だと考えられています。核融合では熱が発生しますが、一部が太陽を構成する気体に吸収され、一部が宇宙空間に放射されています。また、核融合反応は温度が高いほどはやく進みます。太陽の年齢は約 50 億年とされていますが、このように長期間燃え尽きずに安定して存在できたのは、太陽が水など日常にある物質とは違って熱量を得ると温度が下がる性質（見かけの熱容量が負）を持ち、太陽内部での核融合反応が自己制御されているからです。

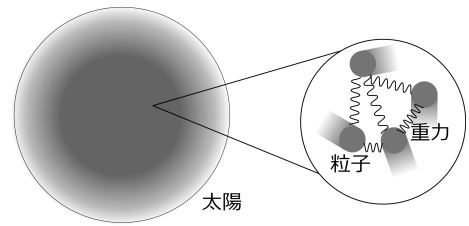
問 2 例えば燃焼で熱量を得られる反応として水素の燃焼を考えてみましょう。水素と酸素は次の反応式にしたがって化学反応します。



このとき反応せずに残っている水素と酸素は熱量を得ます。この化学反応も太陽の中で起きている核融合反応と同じで水素と酸素の温度が高いほど速く進み、条件によっては爆発的に反応が進みます。水素の燃焼に関して最も適切なものを以下の ①~④ のうちから一つ選びなさい。

- ① 化学反応により温度が上がり、化学反応は速くなる。
- ② 化学反応により温度が上がり、化学反応は遅くなる。
- ③ 化学反応により温度が下がり、化学反応は速くなる。
- ④ 化学反応により温度が下がり、化学反応は遅くなる。

問3 太陽が熱量を得ると温度が下がる性質を持つのは、太陽を構成する気体が重力によって自己束縛されているからです。太陽を構成している気体は、大きさが無視でき互いに重力のみを及ぼしあう単原子分子と考えると、太陽が核融合や光の放射



などにより熱量の授受を行ったときの運動エネルギーと重力による位置エネルギーの変化を調べてみましょう。太陽の持つ全エネルギー E は気体の持つ運動エネルギーの総和 K と気体の間にはたらく重力による位置エネルギー U の和で表されます。

$$E = K + U$$

E, K, U の関係について述べたものとして、最も適切なものを以下の ①～④ のうちから一つ選びなさい。ただし、太陽を構成している気体は宇宙空間に飛び散ってしまうわけでもなく、重力により押しつぶされるわけでもなく、安定してとどまっていることから $2K + U = 0$ の等式が成り立つこと(注：これをビリアル定理という)を用いなさい。

- ① 太陽のエネルギー E が増加すると、運動エネルギー K と位置エネルギー U はともに増加する。
- ② 太陽のエネルギー E が増加すると、運動エネルギー K は増加し、位置エネルギー U は減少する。
- ③ 太陽のエネルギー E が増加すると、運動エネルギー K は減少し、位置エネルギー U は増加する。
- ④ 太陽のエネルギー E が増加すると、運動エネルギー K と位置エネルギー U はともに減少する。

問4 問3をふまえると太陽が安定して反応している状態から、核融合反応でわずかにエネルギーを得たとき、核融合反応の速度は速くなりますか？また、核融合反応で太陽の半径はどう変化しますか？太陽の重力による位置エネルギー U は、 R を太陽の半径、 k を正の定数とすると $U = -\frac{k}{R}$ で与えられるとして、最も適切なものを以下の①～④のうちから一つ選びなさい。

- ① 太陽の平均温度が上がり、核融合反応は速くなる。また、太陽は膨張する。
- ② 太陽の平均温度が上がり、核融合反応は速くなる。また、太陽は収縮する。
- ③ 太陽の平均温度が下がり、核融合反応は遅くなる。また、太陽は膨張する。
- ④ 太陽の平均温度が下がり、核融合反応は遅くなる。また、太陽は収縮する。

第3問 (電磁気学)

我々人類が資源の限られた宇宙空間で活動を行うためには、宇宙空間にある資源をうまく活用する必要があります。太陽の光を用いて発電する太陽電池などがその代表例です。

また、地球のまわりを見てみると、プラズマや磁場など物理的観点から考えて活用できそうなものがあります。以下では、実際に JAXA(宇宙航空研究開発機構) にて研究されている、プラズマと磁場とをうまく活用して惑星を周回する探査機や宇宙ゴミ (スペースシャトルや人工衛星などから出たゴミ) などの周回軌道の高度を制御する方法について考えてみましょう。

問1 気体分子が電離すると正の電荷と負の電荷とに分かれますが、これらが別々に運動している状態の気体をプラズマと言います。太陽からやってくるプラズマは地球に住んでいる私たちにも影響を及ぼします。

太陽からやってくるプラズマと関係のある自然現象として、最も適切なものを以下の①～④のうちから一つ選びなさい。

- ① 流星 ② 雷 ③ オーロラ ④ 塵^{しんきろう}気楼

問2 金属のように電流が流れるものを導体と言います。磁場(磁界)中にある導体の棒に電流が流れると、フレミング左手の法則に従って導体棒は力を受けます。フレミング左手の法則とは図1にあるように、磁場の向きと電流の流れる向きと導体棒に働く力の向きとの間に成り立つ関係のことです。

宇宙空間には太陽からやってくるプラズマがありますが、ここではプラズマを「電荷を帯びた粒子」と見なすことにします。図2に示すような状況を考えると、地球磁場(地球の周りの磁場)中においてプラズマをうまく導体棒に取り込んで電流を導体棒に流すことで、導体に力を働かせることができます。

フレミング左手の法則を参考にすると、図2の状況では導体棒はどのような力を受けることになりますか？最も適切なものを以下の①～⑥のうちから一つ選びなさい。ただし、図2では負の電荷を持つプラズマを矢印の方向に取り込んでいるものとします。

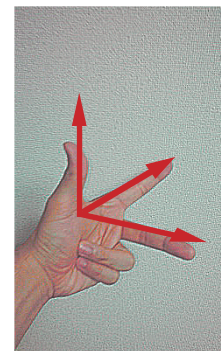


図1 親指は力、人差し指は磁場、中指は電流の向きを表す。力の向きは、磁場及び電流の向きに直交する。

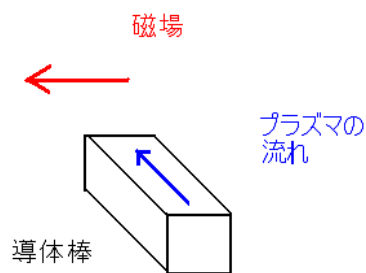
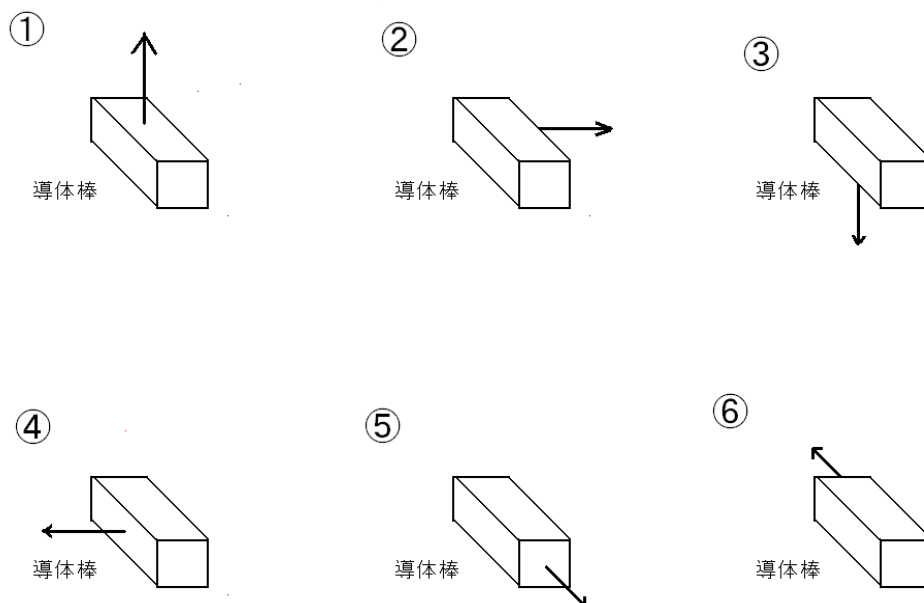


図2 導体棒に流れる負の電荷を帯びたプラズマと磁場。磁場は導体棒と直交しているものとする。



問3 前問で磁場中の導体棒に電流が流れると導体棒が力を受けることが分かりました。ここで、地球を周回する物体に導体棒を取り付けて電流を流すことを考えます。この電流は地球磁場から力を受けるため、結果として物体の軌道の高度を変えることができます。以下では具体的に図3のような状況を考えます。すなわち、高度 h_1 の軌道を周回する物体に前問で見たような導体棒を取り付け、導体棒に電流を流します。すると、電流が地球磁場から力を受けます。物体の進行方向と逆向きにこの力が働くようにすると物体は減速し重力と遠心力とのつり合いが崩れるため、物体は地球に引き寄せられます。

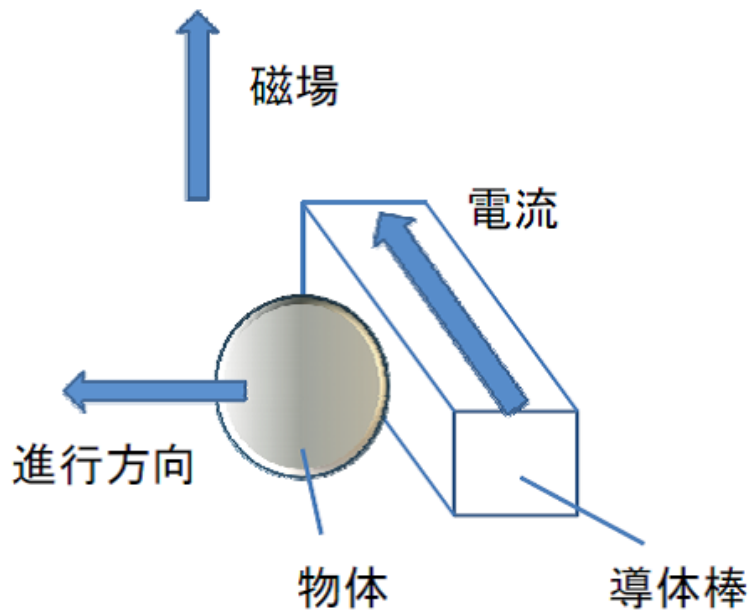


図3 高度 h_1 を周回する物体に導体棒を取り付ける。物体の進行方向と反対向きに力がかかるようにする。

では、物体が高度 h_2 を通過する時のエネルギー保存則を正しく記述する式は次のうちどれでしょうか？最も適切なものを以下の ①～⑥ のうちから一つ選びなさい。ただし、物体の高度を変化させるときに電流が磁場から受ける力によってなされた仕事を W 、高度 h_1, h_2 に物体があるときの速さをそれぞれ v_1, v_2 、高度 h_1, h_2 に物体がある時の位置エネルギーをそれぞれ U_1, U_2 、物体と導体棒との質量の和を M とします。また、 $h_1 > h_2$ であるものとします。

- ① $\frac{1}{2}Mv_1^2 + U_1 = \frac{1}{2}Mv_2^2 + U_2 + W$
- ② $\frac{1}{2}Mv_1^2 + U_1 + W = \frac{1}{2}Mv_2^2 + U_2$
- ③ $U_1 = U_2 + W$
- ④ $U_1 + W = U_2$
- ⑤ $\frac{\frac{1}{2}Mv_1^2 + U_1}{\frac{1}{2}Mv_2^2 + U_2} = W$
- ⑥ $W = 0$

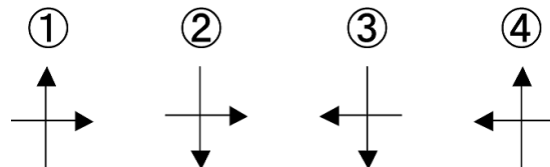
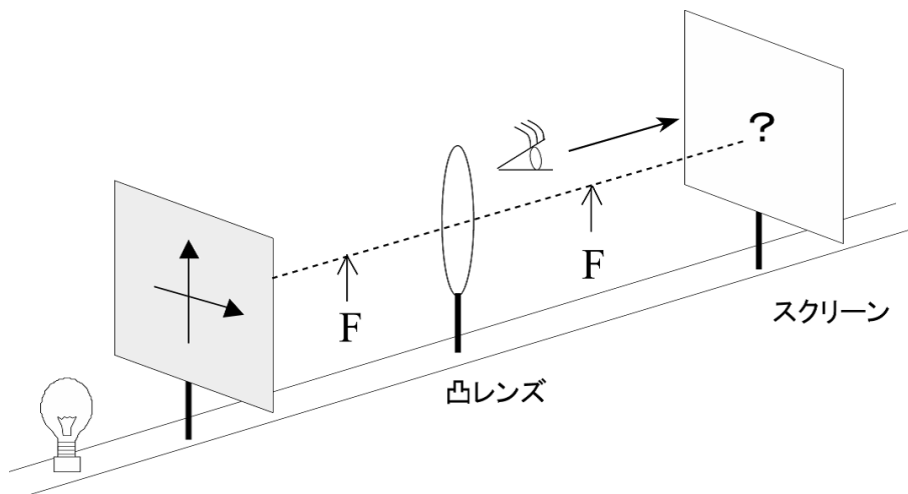
問4 問3の結果をふまえたうえで、間違っているものを以下の①~④のうちから一つ選びなさい。

- ① 導体棒に流れた電流によって電流が磁場から受ける力が物体に仕事をした結果、高度 h_1 で周回する物体は減速し導体棒からはジュール熱が発生すると考えられる。
- ② 高度を一定以上上げることによって物体は地球の大気圏に突入し、小さな物体の場合は最終的に燃え尽きてしまう。
- ③ 磁場とプラズマのエネルギーを用いて物体の高度を h_1 から h_2 まで変えたので、電流が磁場から受ける力によってなされた仕事は0であり、資源の少ない宇宙においては省エネである。
- ④ 外部電源などを用いて電流の向きを逆にすることで物体を加速させ、物体を h_1 よりも高い高度へ移動させることも可能である。

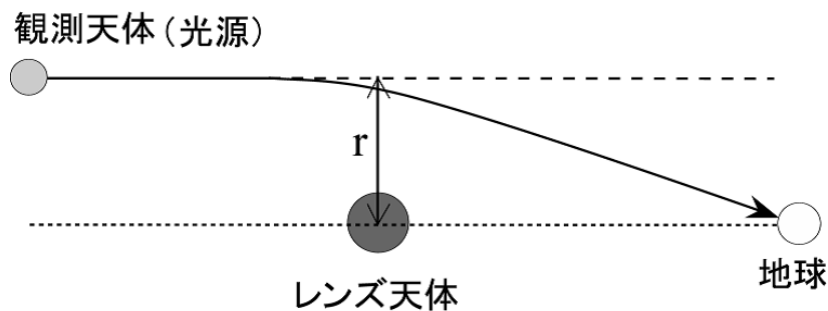
第4問 (波動)

アインシュタインは1915年に一般相対性理論という重力の理論を提唱しました。一般相対性理論によれば物体が存在することで重力が生じ、その重力によって周りの時空が歪められます。光は時空に沿って道筋が最短になるように伝播するので、時空が曲がっていれば光の軌跡も湾曲することが预言されます。

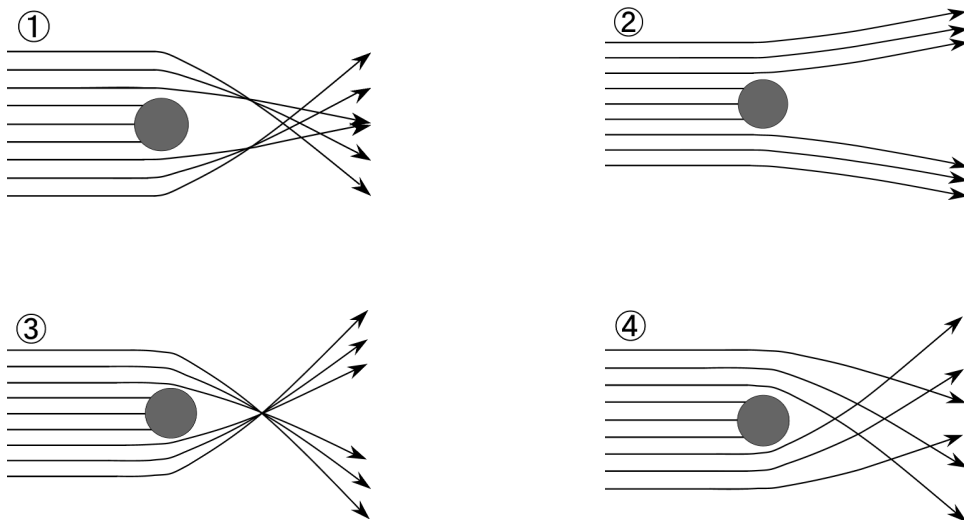
問1 光の軌跡を曲げるものの身近な例としてレンズが挙げられます。下図のような光学台を用いて凸レンズでできる像について考えます。電球と凸レンズの間に半透明の板を設置し中央に図に示すようなマークをつけます。スクリーン(白板)を移動させ図の位置で像がはっきりと写りました。この時スクリーン上にはどのような像が写るでしょうか。最も適切なものを以下の①~④のうちから一つ選びなさい。Fは凸レンズの焦点を表します。



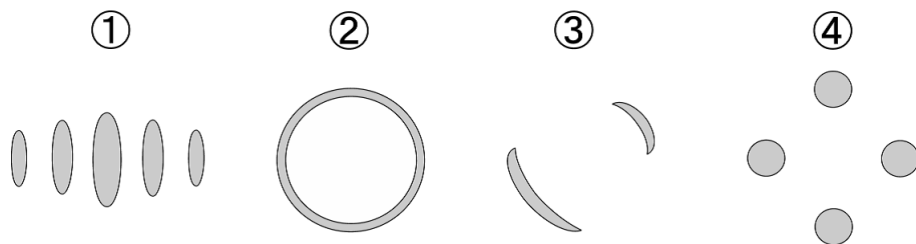
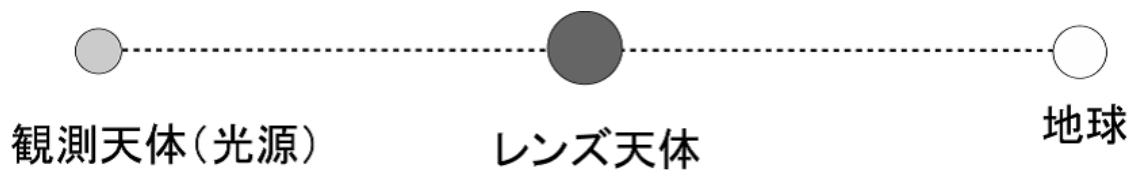
地球と観測天体の間に重力源となる天体が存在する場合、空間の歪みにより光の軌跡が曲げられ、本来届かないはずの天体の光が地球に届きます。このように重力源となる天体がレンズのような働きをすることから、この効果を「重力レンズ効果」と呼び、重力源となる天体をレンズ天体と呼びます。一般相対性理論によればレンズ天体が質点とみなせる場合、天体の近傍を通る光ほど大きく曲げられます。つまり光の曲がる角度は、レンズ天体の中心から、重力の影響が無い場合の光線までの距離 r に反比例します。質点とは質量のみを持ち大きさが無く理想化された点状の物体のことです。ここで質点とみなせるレンズ天体とは、恒星や惑星（星）など全質量が星の中心に集中しているとみなせる天体のことであり、銀河や銀河団のような質量に分布がある天体は含みません。以下、レンズ天体は質点とみなせるとします。またレンズ天体の自転による影響は考慮しません。



問 2 観測天体からの平行光線がレンズ天体の近くを通過した時の光の軌跡として正しい模式図はどれか。最も適切なものを以下の ①～④ のうちから一つ選びなさい。

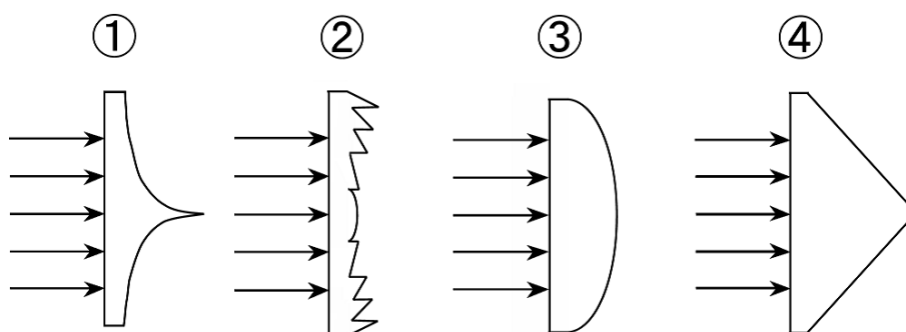
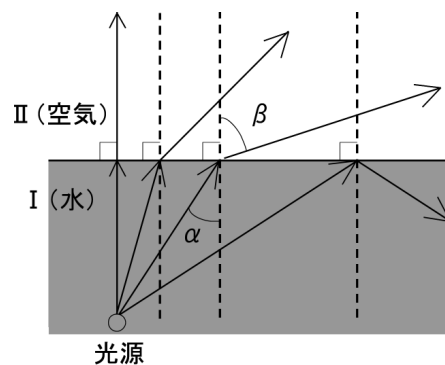


問3 地球と観測天体とレンズ天体の3つが完全に一直線上にならんでいるとします。この場合、観測天体を地球から観測するとどのような形に見えるでしょうか。模式図として最も適切なものを以下の①~④のうちから一つ選びなさい。ただし、レンズ天体の像は考えないものとします。



問4 レンズ天体と同じ屈折をする等価光学レンズを作ることを考えます。等価光学レンズの断面図の模式図として、最も適切なものを以下の①~④のうちから一つ選びなさい。

補足：光には屈折という現象があります。これは異なる物質中に入るときに、光線が折れ曲がる現象です。右図は光が水中から空気中に入射するときの光の屈折の様子を示した図です。屈折率の大きな物質Ⅰから屈折率の小さな物質Ⅱへ光が進むとき、屈折角 β は入射角 α より大きくなります。



問題は以上です。

京都物理コンテスト 2011 理論問題
京都物理グランプリ 2011 運営委員会