$\boxed{1}$ [2006 JMO予選 第7問]

x, y, z は相異なる2桁の正の整数であり，x の一の位の数字と y の十の位の数字は等しく，y の一の位の数字と z の十の位の数字は等しく，z の一の位の数字と x の十の位の数字は等しい．このような3つの数 x, y, z の最大公約数として考えられる値は何個か．

（解説）

条件より，1以上9以下の自然数 a, b, c を用いて，

$$x=10a+b,\ y=10b+c,\ z=10c+a \quad \cdots\cdots ①$$

と表すことができる．x, y, z の最大公約数を d とおく．

d が11の倍数であると仮定すると，x, y, z は2桁の正の整数より，これらの整数はすべて十の位と一の位の数字が同じとなる．よって条件により，$a=b=c$ となってしまい，x, y, z が相異なることに矛盾する．よって，d は11の倍数ではない．

①の辺々を足すと，

$$x+y+z=11(a+b+c) \quad \cdots\cdots ②$$

となる．x, y, z はいずれも d で割り切れるから，②の左辺は d で割り切れる．よって，

$$11(a+b+c)=dm \ (m \text{ は自然数}) \quad \cdots\cdots ③$$

と表される．しかし11は素数であり，d は11の倍数ではないから，11と d は互いに素である．よって③より $a+b+c$ は d で割り切れる．a, b, c は1以上9以下の自然数だから，

$$1 \leq d \leq a+b+c \leq 27 \quad \cdots\cdots ④$$

がいえる．また，

$$100x-10y+z=1000a+100b-100b-10c+10c+a=1001a$$

であり，この左辺は d で割り切れるので，$1001a$ も d で割り切れる．同様に $1001b, 1001c$ もそれぞれ d で割り切れる．

そこで，a, b, c の最大公約数を k とおくと，$1001k\,(=7\times11\times13\times k)$ も d で割り切れる．しかし，11と d は互いに素であるので，結局 $91k$ は d で割り切れることになる．

ここで，$k \geqq 5$ のときは $a=b=c$ としかなり得ない．すなわち，$x=y=z$ となり，条件に合わない．したがって，④の条件も合わせて考えると，$91k\ (1 \leqq k \leqq 4)$ を割り切る d の候補は，

$$d=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 7,\ 13,\ 14,\ 21,\ 26$$

ですべてである．しかし，$d=21$ のとき，x, y, z の値になりうるものは21, 42, 63, 84であるが，これらのどの3つを選んでも，条件を満たすような x, y, z とはならない．$d=26$ のときも同様である．

一方で，$d=1, 2, 3, 4, 7, 13, 14$ となるような x, y, z は存在する．それぞれ例えば，

$$(x, y, z)=(32, 21, 13), (64, 42, 26), (96, 63, 39), (88, 84, 48), (42, 21, 14), (65, 52, 26), (84, 42, 28)$$

とればよい．

以上より，条件を満たす最大公約数 d は1, 2, 3, 4, 7, 13, 14の7個である．

2 [2011 アジア太平洋数学オリンピック(APMO) 問題 1]

a, b, c を正の整数とするとき，$a^2+b+c, b^2+c+a, c^2+a+b$ の 3 つの数が同時に平方数とはならないことを示せ．ただし，平方数とはある整数の 2 乗になっている整数のことを言う．

解説

$a^2+b+c, b^2+c+a, c^2+a+b$ の 3 つの数が同時に平方数になったと仮定する．

a^2+b+c について，b, c は正の整数だから，

$$a^2+b+c>a^2$$

ここで，a^2+b+c は平方数であるから，

$$a^2+b+c \geqq (a+1)^2 \quad \text{ゆえに，} \quad b+c \geqq 2a+1 \quad \cdots\cdots ①$$

b^2+c+a, c^2+a+b についても同様に，

$$c+a \geqq 2b+1 \quad \cdots\cdots ② \qquad a+b \geqq 2c+1 \quad \cdots\cdots ③$$

が成り立つ．よって① ～ ③より，

$$(b+c)+(c+a)+(a+b) \geqq (2a+1)+(2b+1)+(2c+1)$$

$$2(a+b+c) \geqq 2(a+b+c)+3$$

となって矛盾が生じる．

したがって，$a^2+b+c, b^2+c+a, c^2+a+b$ の 3 つの数が同時に平方数とはならない．

別解

$a^2+b+c, b^2+c+a, c^2+a+b$ の 3 つの数が同時に平方数になったと仮定する．

a, b, c は正の整数であるから，上式は，正の整数 x, y, z を用いてそれぞれ，

$$\begin{cases} a^2+b+c=(a+x)^2 \\ b^2+c+a=(b+y)^2 \\ c^2+a+b=(c+z)^2 \end{cases} \quad \text{すなわち，} \quad \begin{cases} b+c=2ax+x^2 \\ c+a=2by+y^2 \\ a+b=2cz+z^2 \end{cases}$$

と表される．これらの式の辺々を足して整理すると，

$$2(a+b+c)=2(ax+by+cz)+(x^2+y^2+z^2) \quad \cdots\cdots ①$$

となる．ここで，a, b, c, x, y, z は正の整数であるから，

$$a+b+c \leqq ax+by+cz, \quad x^2+y^2+z^2>0$$

であるから，

$$2(a+b+c)<2(ax+by+cz)+(x^2+y^2+z^2)$$

となり，①式に矛盾する．

したがって，$a^2+b+c, b^2+c+a, c^2+a+b$ の 3 つの数が同時に平方数とはならない．

3 [2003 JMO予選 問題 3 改題]

p は素数で，m は正の整数である．m 個の整数 $a_{m-1}, a_{m-2}, \ldots\ldots, a_0$ は0以上 $p-1$ 以下であり，

$$\begin{cases} a_{m-1}p^{m-1}+a_{m-2}p^{m-2}+\cdots\cdots\cdots+a_1p+a_0=2012 \\ a_{m-1}+a_{m-2}+\cdots\cdots\cdots+a_1+a_0=24 \end{cases}$$

が成立している．p として考えられる数をすべて求めよ．

(解説)

$$\begin{cases} a_{m-1}p^{m-1}+a_{m-2}p^{m-2}+\cdots\cdots\cdots+a_1p+a_0=2012 & \cdots\cdots① \\ a_{m-1}+a_{m-2}+\cdots\cdots\cdots+a_1+a_0=24 & \cdots\cdots② \end{cases}$$

①，②の条件式を辺々引いて整理すると，

$$a_{m-1}(p^{m-1}-1)+a_{m-2}(p^{m-2}-1)+\cdots\cdots\cdots+a_1(p-1)=1988 \quad \cdots\cdots③$$

ここで，自然数 k について，

$$a_k(p^k-1)=a_k(p-1)(p^{k-1}+p^{k-2}+\cdots\cdots\cdots+p+1)$$

となるので，③の左辺は $p-1$ で割り切れる．ここで，$1988=2^2\cdot7\cdot71$ であるから，$p-1$ の候補は，

$$p-1=1,\ 7,\ 71,\ 497,\ 2,\ 14,\ 142,\ 994,\ 4,\ 28,\ 284,\ 1988$$

であるが，p は素数だから，$p=2,\ 3,\ 5,\ 29$ に限られる．

以下では，それぞれの p について，2012 を①のように変形し，②を満たすかどうか検証する．

$p=2$ のとき，

$$\begin{aligned} 2012&=2\cdot1006 \\ &=2(2\cdot503)=2^2\cdot503 \\ &=2^2(2\cdot251+1)=2^3\cdot251+2^2 \\ &=\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &=2^{10}+2^9+2^8+2^7+2^6+2^4+2^3+2^2 \end{aligned}$$

よって，①と比較すると，

$$a_{10}=a_9=a_8=a_7=a_6=a_4=a_3=a_2=1,\ \ a_5=a_1=a_0=0$$

となり，

$$a_{10}+a_9+\cdots\cdots\cdots+a_1+a_0=8$$

となって，②を満たさない．

$p=3$ のとき，

$$\begin{aligned} 2012&=3\cdot670+2 \\ &=3(3\cdot223+1)+2=3^2\cdot223+3^1+2 \\ &=3^2(3\cdot74+1)+3^1+2=3^3\cdot74+3^2+3^1+2 \\ &=\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &=2\cdot3^6+2\cdot3^5+2\cdot3^3+1\cdot3^2+1\cdot3^1+2 \end{aligned}$$

よって，①と比較すると，

$$a_6=a_5=a_3=a_0=2,\ \ a_2=a_1=1,\ \ a_4=0$$

となり，

$$a_6+a_5+\cdots\cdots+a_1+a_0=10$$

となって，②を満たさない．

$p=5$ のとき，

$$\begin{aligned}2012&=5\cdot402+2\\&=5(5\cdot80+2)+2=5^2\cdot80+2\cdot5^1+2\\&=5^2(5\cdot16)+2\cdot5^1+2=5^3\cdot16+2\cdot5^1+2\\&=5^3(5\cdot3+1)+2\cdot5^1+2=3\cdot5^4+1\cdot5^3+2\cdot5^1+2\end{aligned}$$

よって，①と比較すると，

$$a_4=3,\quad a_1=a_0=2,\quad a_3=1,\quad a_2=0$$

となり，

$$a_4+a_3+a_2+a_1+a_0=8$$

となって，②を満たさない．

$p=29$ のとき，

$$\begin{aligned}2012&=29\cdot69+11\\&=29(29\cdot2+11)+11\\&=2\cdot29^2+11\cdot29^1+11\end{aligned}$$

よって，①と比較すると，

$$a_2=2,\quad a_1=a_0=11$$

となり，

$$a_2+a_1+a_0=24$$

となって，②を満たす．

したがって，$p=29$

$\boxed{4}$ [1984 IMOプラハ大会 問題２]

次の条件 (i), (ii) を満たす正の整数 a, b の組を１組見つけなさい．

(i)　$ab(a+b)$ は７で割り切れない．

(ii)　$(a+b)^7-a^7-b^7$ は 7^7 で割り切れる．

ヒント

必要であれば，以下の定理を用いてもよい．

（オイラーの定理）

自然数 N と互いに素である任意の自然数 c について，

$$c^{\phi(N)} \equiv 1 \pmod N$$

が成り立つ．ここで $\phi(N)$ とは，

0 以上 N 未満の整数の中で，N と互いに素であるものの個数

を表す．

解説

$$\begin{aligned}
&(a+b)^7-a^7-b^7\\
&=(a^7+7a^6b+21a^5b^2+35a^4b^3+35a^3b^4+21a^2b^5+14ab^6+b^7)-a^7-b^7\\
&=7ab(a^5+3a^4b+5a^3b^2+5a^2b^3+3ab^4+b^5)\\
&=7ab\{(a^5+b^5)+3ab(a^3+b^3)+5a^2b^2(a+b)\}\\
&=7ab\{(a+b)(a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4)+3ab(a+b)(a^2-ab+b^2)+5a^2b^2(a+b)\}\\
&=7ab(a+b)(a^4+2a^3b+3a^2b^2+2ab^3+b^4)\\
&=7ab(a+b)\{(a^2)^2+(ab)^2+(b^2)^2+2a^2\cdot ab+2ab\cdot b^2+2b^2\cdot a^2\}\\
&=7ab(a+b)(a^2+ab+b^2)^2
\end{aligned}$$

条件 (i) より，$ab(a+b)$ は７で割り切れないから，条件 (ii) を満たすためには，

$(a^2+ab+b^2)^2$ が 7^6 で割り切れる　　すなわち，$\boxed{a^2+ab+b^2 \equiv 0 \pmod{7^3}}$ ……①

を満たせばよい．

まず，条件 (ii) を満たす，すなわち①を満たす正整数 a, b について考える．

$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2) \quad \cdots\cdots ②$$

であるから，①，②より，

$\boxed{a^3-b^3 \equiv 0 \pmod{7^3}}$ ……③　かつ　$\boxed{a-b \not\equiv 0 \pmod 7}$ ……④

を満たす正整数 (a, b) の組は①を満たす．

そこで，③を満たす正整数 (a, b) の組を１つ見つけ，それが④を満たすことを検証すればよい．
ここで，0 以上 7^3 未満の整数の中で 7^3 と互いに素であるものの個数を $\phi(7^3)$ とおくと，7^3 と互いに素ではない自然数は，

$$0,\ 7\cdot1,\ 7\cdot2,\ \cdots\cdots,\ 7\cdot(7^2-1)$$

の $7^2(=49)$ 個であるから，

$$\phi(7^3)=7^3-7^2=6\cdot7^2=3\cdot98$$

である．よってオイラーの定理より，7^3 と互いに素である任意の整数 c に対して，

$\boxed{c^{3\cdot 98}\equiv 1 \pmod{7^3}}$ ……⑤

が成り立つ．例えば，2 は 7 と互いに素なので 7^3 とも互いに素であるから，$c=2$ としてオイラーの定理が使え，⑤より，

$$(2^{98})^3\equiv 1 \pmod{7^3}$$

である．すなわち，

$$(2^{98})^3-1^3\equiv 0 \pmod{7^3}$$

が成り立つ．よって，③を満たす正整数 $(a,\ b)$ の組として，$(a,\ b)=(2^{98},\ 1)$ が取れる．

また，この正整数の組について，

$$a-b=2^{98}-1=4\cdot(2^3)^{32}-1\equiv 4\cdot 1^{32}-1\equiv 3 \pmod 7$$

であるから，この組は④も満たす．

したがって，正整数 $(a,\ b)=(2^{98},\ 1)$ の組は，条件 (ii) を満たす．

次に，この正整数 $(a,\ b)=(2^{98},\ 1)$ の組が条件 (i) を満たすかどうかを調べる．

$$a=2^{98}\equiv 4 \pmod 7$$

であるから，

$$a+b\equiv 4+1\equiv 5 \pmod 7$$

$$ab\equiv 4\cdot 1\equiv 4 \pmod 7$$

よって，$ab(a+b)\equiv 20\equiv 6 \pmod 7$ となり，条件 (i) を満たす．

以上より，正整数 $(a,\ b)=(2^{98},\ 1)$ は条件 (i), (ii) を満たす組である．

追加

$a=2^{98}$ は非常に大きな数であるから，a として小さい数を求める場合，以下の議論を行う．

$2^{98}\equiv x \pmod{7^3}$ を満たす $x\,(<2^{98})$ を求めると，正整数 $(a,\ b)=(x,\ 1)$ の組は，③，④の条件を満たすから条件 (ii) を満たし，また，条件 (i) も満たすので，題意を満たす．

$$2^8=256=7^3-87\equiv -87 \pmod{7^3}$$

$$2^{10}=1024=3\cdot 7^3-5\equiv -5 \pmod{7^3}$$

$$2^{20}=(2^{10})^2\equiv(-5)^2\equiv 25 \pmod{7^3}$$

$$2^{40}=(2^{20})^2\equiv(25)^2\equiv 2\cdot 7^3-61\equiv -61 \pmod{7^3}$$

$$2^{80}=(2^{40})^2\equiv(-61)^2\equiv 11\cdot 7^3-52\equiv -52 \pmod{7^3}$$

$$2^{90}=2^{80}\cdot 2^{10}\equiv(-52)\cdot(-5)\equiv 260\equiv -83 \pmod{7^3}$$

よって，

$$2^{98}=2^8\cdot 2^{90}\equiv(-87)\cdot(-83)\equiv 21\cdot 7^3+18\equiv 18 \pmod{7^3}$$

したがって，正整数 $(a,\ b)=(18,\ 1)$ も条件 (i), (ii) を満たす組である．

別解

$$(a+b)^7-a^7-b^7=7ab(a+b)(a^2+ab+b^2)^2$$

条件 (i) より，$ab(a+b)$ は 7 で割り切れないから，条件 (ii) を満たすためには，

$(a^2+ab+b^2)^2$ が 7^6 で割り切れる　　すなわち，$\boxed{a^2+ab+b^2\equiv 0 \pmod{7^3}}$ ……①

を満たせばよい．

ここで，条件 (i) より $b\not\equiv 0 \pmod 7$ であるから，以下では，$b=1$ のときについて考える．

$b=1$ のとき，条件を整理すると，a は，

$a(a+1)$ は 7 で割り切れない，かつ　$a^2+a+1\equiv 0 \pmod{7^3}$

すなわち，

$\boxed{a\not\equiv 0,\ 6 \pmod 7}$ ……②　かつ　$\boxed{a^2+a+1\equiv 0 \pmod{7^3}}$ ……③

を満たせばよい．そこで，②，③を同時に満たす a を探すために，②を満たす a のうち，

$a^2+a+1\equiv 0$ $\underline{(\mathrm{mod}\ 7)}$，$a^2+a+1\equiv 0$ $\underline{(\mathrm{mod}\ 7^2)}$

を満たす a を順に探していき，最後に③を満たす a を探す．

まず，

$a^2+a+1\equiv 0$ $\underline{(\mathrm{mod}\ 7)}$ ……④

と②を同時に満たす a として，$a\equiv 2,\ 4 \pmod 7$ が挙げられる．実際，

$2^2+2+1=7\equiv 0 \pmod 7$，$4^2+4+1=21\equiv 0 \pmod 7$

である．よって，a は整数 k を用いて，

$a=7k+2,\ 7k+4$ ……⑤

と表されるとき，④を満たす．

次に，⑤を満たす a のうち，

$a^2+a+1\equiv 0$ $\underline{(\mathrm{mod}\ 7^2)}$ ……⑥

を満たす a として，$a\equiv 18,\ 30 \pmod{7^2}$ が挙げられる．実際，

$18^2+18+1=343\equiv 0 \pmod{7^2}$，$30^2+30+1=931\equiv 0 \pmod{7^2}$

である．よって，a は整数 l を用いて，

$a=49l+18,\ 49l+30$ ……⑦

と表されるとき，⑥を満たす．

最後に，⑦を満たす a のうち，③を満たす a の 1 つとして，

$a=18$

が挙げられる (※)．実際，

$18^2+18+1=343\equiv 0 \pmod{7^3}$

である．

したがって，正整数 $(a,\ b)=(18,\ 1)$ は条件 (i), (ii) を満たす組である．

※ちなみに，③を満たす a は，

$a\equiv 18,\ 324 \pmod{7^3}$

となる．