$\boxed{1}$ [1972 全米数学オリンピック(USAMO) 第３問]

9個の整数 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ から1つを選ぶ，という試行を独立にn回繰り返すとき，選ばれた数の積が10の倍数になる確率を，nを用いて表せ．

ただし，各回にどの数が選ばれるかは同様に確からしいとし，同じ数が複数回選ばれることもありうる．

(解説)

n回の試行において，

[1]　5が一度も選ばれない確率は，$\left(\dfrac{8}{9}\right)^n$

[2]　偶数 $(2, 4, 6, 8)$ が一度も選ばれない確率は，$\left(\dfrac{5}{9}\right)^n$

[3]　5も偶数も一度も選ばれない確率は，$\left(\dfrac{4}{9}\right)^n$

よって，選ばれた数の積が10の倍数にならない確率は，

$$\left(\frac{8}{9}\right)^n+\left(\frac{5}{9}\right)^n-\left(\frac{4}{9}\right)^n$$

したがって，選ばれた数の積が10の倍数になる確率は，

$$1-\left\{\left(\frac{8}{9}\right)^n+\left(\frac{5}{9}\right)^n-\left(\frac{4}{9}\right)^n\right\}=1-\left(\frac{8}{9}\right)^n-\left(\frac{5}{9}\right)^n+\left(\frac{4}{9}\right)^n \quad \left(=\frac{9^n-8^n-5^n+4^n}{9^n}\right)$$

$\boxed{2}$ [2005 JMO予選 問題 8]

７つの席に区切られた長椅子に，７人の人が１人ずつ来て座る．ただし，他人と隣り合わない席が残っているうちは，どの人も他人の隣には座らない．席が埋まっていく順は何通りあるか．

(解説)

1人ずつ座っていくと，3人目あるいは4人目が座った段階で，他人と隣り合わない席が埋まった状態となる．そのときの席の埋まっている状態は以下のように，全部で7通りである．

①	●		●		●		●
②	●		●			●	
③	●			●		●	
④	●			●			●
⑤		●		●		●	
⑥		●		●			●
⑦		●			●		●

(●は，埋まった席を表す．)

①について，●の席の埋まり方は $4!$ 通りで，空いている席の埋まり方は $3!$ 通り．
よって，途中で①の状態になる席の埋まり方は $4!\times 3!$ (通り)
②から⑦について，●の席の埋まり方は $3!$ 通りで，空いている席の埋まり方は $4!$ 通り．
よって，途中で②から⑦のいずれかの状態になる席の埋まり方は $6\times(3!\times 4!)$ (通り)

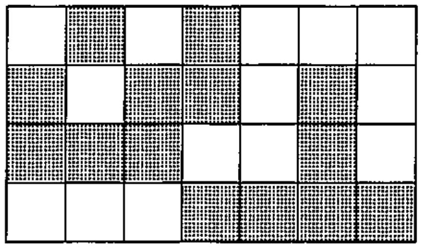
したがって，席が埋まっていく順は，

$4!\times 3! + 6\times(3!\times 4!) = 1008$ 通り

3 [1976 全米数学オリンピック(USAMO) 第１問]

4×7 マスのチェス盤があり，各マスは白または黒で適当に塗られている．白黒の色付けをどのようにしても，チェス盤には以下のような長方形が少なくとも１つは存在することを示せ．

「縦も横も２マス以上であり，四隅のマスがすべて同じ色の長方形」



(解説)

3×7 マスのチェス盤を考える．

すると，チェス盤の各列は必ず黒または白のマスのどちらかが多くなる．ここで，

(黒のマスが多い列の数) = B,　(白のマスが多い列の数) = W

とすると，以下が言える．

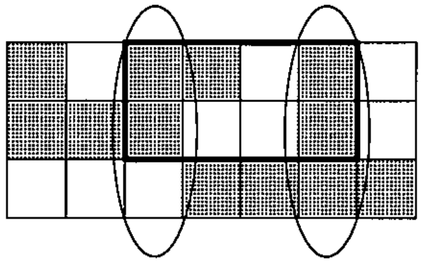
$B > W$　または　$B < W$

列数は７であるから，上式は，

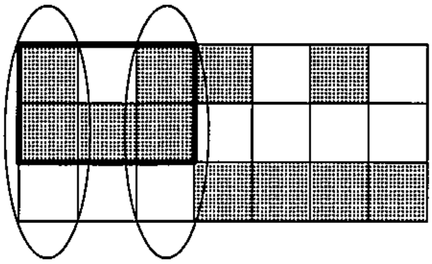
$B \geqq 4$　または　$W \geqq 4$

と言い換えることができる．先に $B \geqq 4$ のときについて考える．

[1] すべて黒のマスの列が存在するとき，
$B \geqq 4$ であるから，この列以外に黒のマスが２つ以上ある列が存在する．よって，この２つの列から，四隅が黒のマスの長方形を作ることができる．



[2] すべて黒のマスの列が存在しないとき，
$B \geqq 4$ であるから，黒のマスがちょうど２つ（白のマスがちょうど１つ）ある列が４つ以上存在する．
しかし，黒のマス２つと白のマス１つの並べ方は全部で3通りしか存在しない．
よって，黒のマスが多い列の中には，全く同じ配列のものが少なくとも１つは存在する．
したがって，この同じ配列をした列から，四隅が黒のマスの長方形を作ることができる．

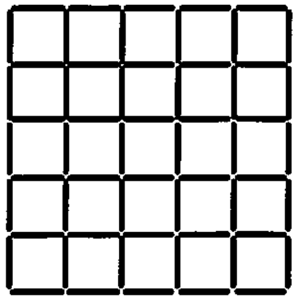


$W \geqq 4$ のときについては，上の議論において，白と黒をひっくり返したものを考えればよい．

したがって，3×7 マスのチェス盤において，題意を満たす長方形は少なくとも１つは存在するため，これに適当な白と黒の配列をした行を１つ加えることで，4×7 マスのチェス盤においても，同様のことが言える．

4　右図のように，同じ長さのマッチ棒を使って，正方形が縦横に5個ずつ隣り合った図形を作る．

この中からマッチ棒を何本か取り除いて，どんな大きさの正方形も残らないようにしたい．少なくとも何本取り除く必要があるか．



（解説）

14本取り除けば可能である．右図に一例を示す．

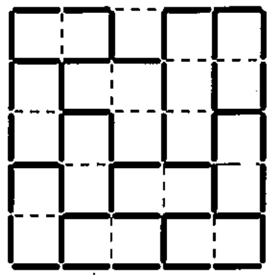


図1：解答例

以下では，13本取り除いても必ず正方形が残ることを示す．5×5の正方形を消すために，

一番外のマッチ棒を少なくとも1本取り除く必要がある．

いま，図の一番上のマッチ棒5本のうちの1本を取り除くとする．

（これ以外のマッチ棒を取り除いたとしても，図を回転させると取り除いたマッチ棒が上になると考えればよい）．

1×1の正方形は24個となり，取り除くことができるマッチ棒は12本である．1本のマッチ棒を取り除くことで消すことができる1×1の正方形は最大2個であるから，1×1の正方形をすべて消すためには，

マッチ棒を1本取り除くごとに正方形を2個ずつ消さなければならない．

つまり，1×1の正方形24個を2×1の長方形12個に変換しなければならない．よってこの問題は，

「2×1の長方形を5×5のマス目に（下から）敷き詰めることができるか」

という問題に置き換えることができる．

以降では，5×5のマス目に2×1の長方形を敷き詰めるときに，2×2の正方形が必ずできてしまうことを示す．

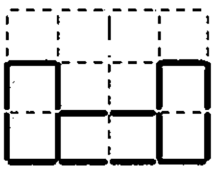


図2

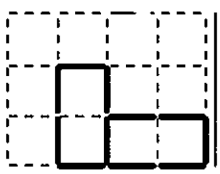


図3

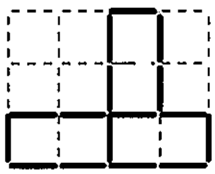


図4

下から順に2×1の長方形を敷き詰めていくとき，上の図2, 3, 4（3, 4は左右逆も含む）のような形ができたときは，この後どのように長方形を敷き詰めても2×2の正方形ができてしまう．このようにならないように一番下の段を長方形で敷き詰めるには，図5のように敷き詰めなければならない．

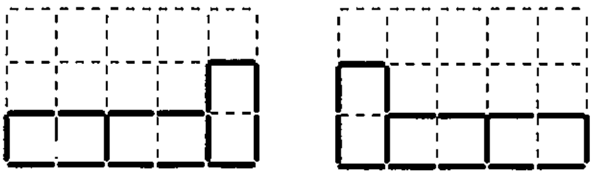


図5

この状態から2段目を敷き詰める際，図4のような形ができないようにするには，下図6のようにしなければならないため，図2の形ができてしまう．（図2のような形ができないようにしても，図4の形ができてしまうため，結局2×2の正方形ができてしまう）

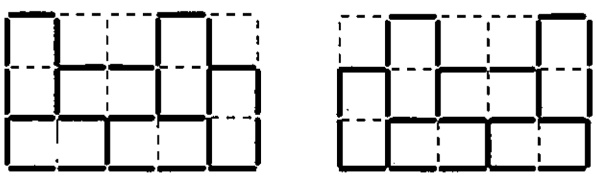


図6

したがって，マッチ棒を13本取り除いても必ず正方形は残るため，少なくとも14本取り除く必要がある．