1 [2008 JMO予選 第２問]

一辺１の正方形ABCDがある．ADを直径とする円をOとし，辺AB上の点Eを，直線CEがOの接線となるようにとる．このとき，三角形CBEの面積を求めよ．

解説

円Oと直線CEの接点をFとする．

右図において，△AOE∽△FOE，△COF∽△COD であるから，

AE = EF ……①

CF = CD = 1 ……②

また，∠AOE=∠FOE，∠COF=∠COD であるから，

∠COE = ∠FOE + ∠COF = 90°

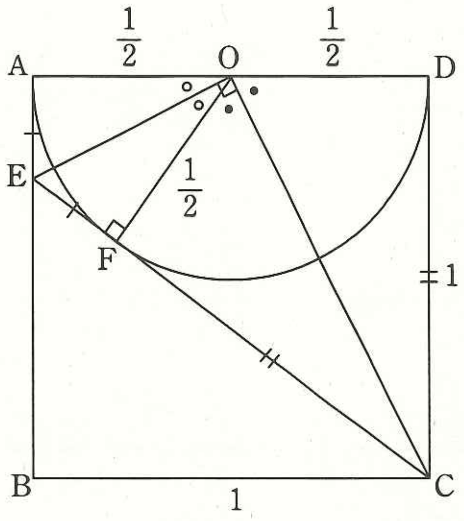
よって，△EOF∽△OCF となり，

EF : OF = OF : CF

①，②より，AE = EF = $\frac{1}{4}$

したがって，

$$\triangle CBE = \frac{1}{2}\cdot BC\cdot CE = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot\left(1-\frac{1}{4}\right) = \frac{3}{8}$$



別解

円Oと直線CEの接点をFとする．

右図において，△AOE∽△FOE，△COF∽△COD であるから，AE = x とおくと，

AE = EF = x，CF = CD = 1

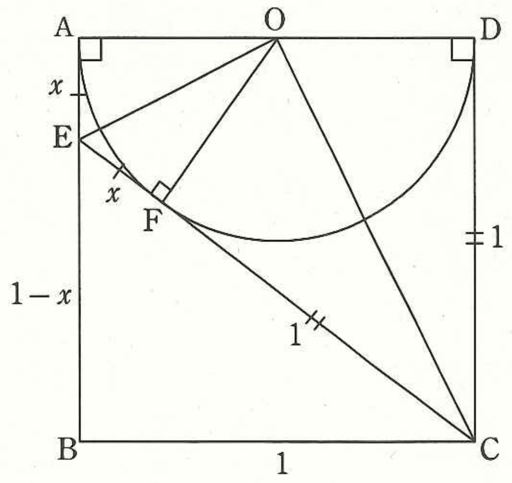
よって，△BCE において，三平方の定理より

$$(x+1)^2 = (1-x)^2 + 1^2$$

これを解いて，$x = \frac{1}{4}$

したがって求める面積は，

$$\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\left(1-\frac{1}{4}\right) = \frac{3}{8}$$

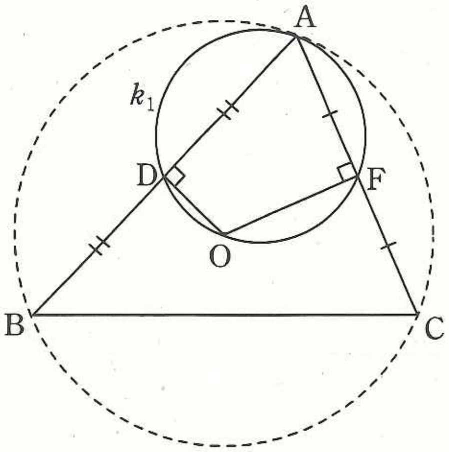


2 [BAMO 2000 第2 問]

三角形 ABC において，AB の中点を D，BC の中点を E，CA の中点を F とする．
3点 A, D, F を通る円を k_1，B, E, D を通る円を k_2，C, F, E を通る円を k_3 とする．
3個の円 k_1, k_2, k_3 は，1 点で交わることを示せ．

(解説)

円 k_1 が三角形 ABC の外心 O を通ることを示す．これが示されれば，同様にして k_2, k_3 が O を通ることが示され，3 個の円 k_1, k_2, k_3 は，1 点 O で交わることが分かる．



O は外心なので，線分 OD, OF はそれぞれ辺 AB, AC の垂直二等分線である．これより，四角形 ADOF について，

$$\angle ADO + \angle OFA = 180^\circ$$

が成り立つので，四角形 ADOF は円に内接する．
この円は 3 点 A, D, F を通るので k_1 に一致する．
よって O は円 k_1 上にある．

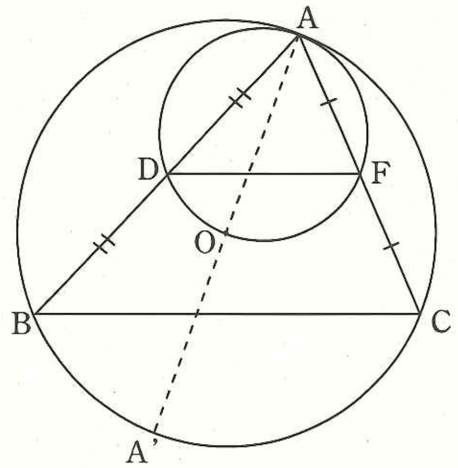
したがって，3 個の円 k_1, k_2, k_3 は，1 点 O で交わる．

別解

$\triangle ABC \backsim \triangle ADF$ であり，相似比は 2 : 1 であるから，円 O と円 k_1 の相似比も 2 : 1 である．
よって，図のように円 O の直径 AA' をつくると，

$$AA' : AO = 2 : 1$$

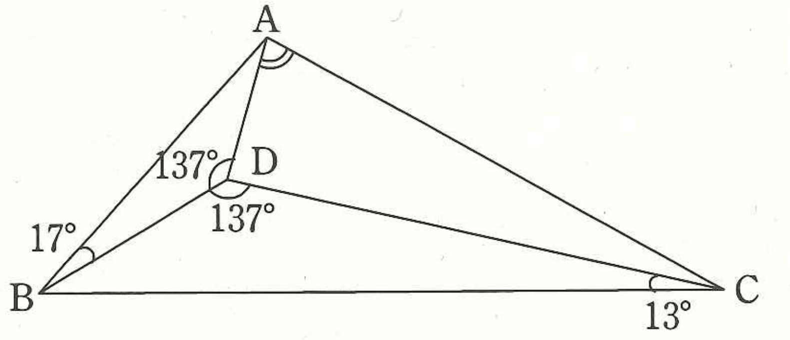
となるため，AO は円 k_1 の直径となる．
つまり，点 O は円 k_1 上にある．



同様にして k_2, k_3 が O を通ることが示され，3 個の円 k_1, k_2, k_3 は，1 点 O で交わることが分かる．

3 ［月刊「理系への数学」幾何大王からの挑戦状　2011年9月号］

下の図のような△ABCにおいて，∠CAD= $\boxed{}$ である。



(解説)

図のように，線分 AD の A 側の延長上に，DE = DC となるように点 E をとる．
△BED と △BCD において，

∠BDE = ∠BDC = 137°

DE = DC

BD = BD

であるから，△BED ≡ △BCD

ゆえに，BE = BC

また，∠DBE = ∠DBC = 30° であるから，

∠CBE = 60°

よって，三角形 BCE は正三角形となる．これより，

∠ABE = ∠DBE − ∠DBA = 13°

∠BEA = 180° − (∠DBE + ∠BDE) = 13°

よって，△ABE は二等辺三角形となり，

AB = AE

これより，△ABC と △AEC において，

AB = AE

BC = EC

∠ABC = ∠AEC = 47°

であるから，△ABC ≡ △AEC

ゆえに，∠BAC = ∠EAC

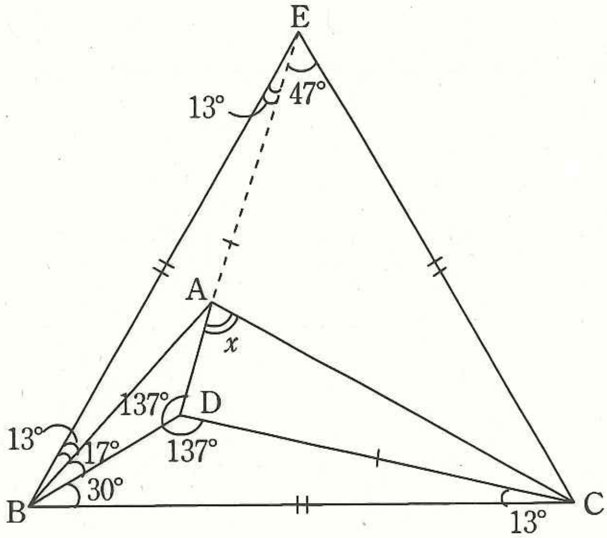
∠CAD = x とおくと，

∠EAC = ∠BAC = ∠BAD + ∠CAD = x +26°

3 点 D，A，E は一直線上にあるから，∠EAC + ∠CAD = 180° より，

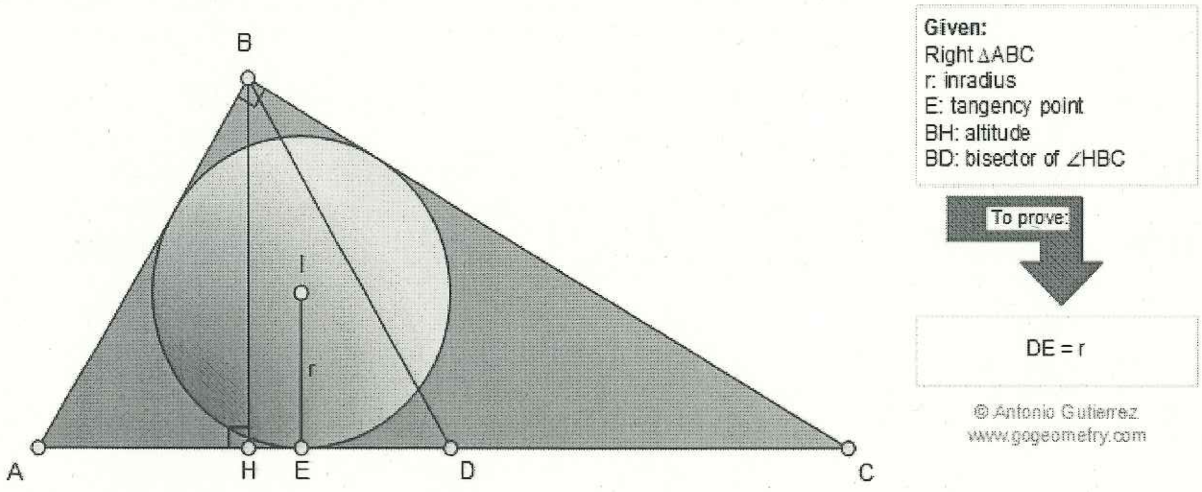
$x+(x+26°)=180°$

ゆえに，∠CAD = x =77°



4 [Go Geometry.com Geometry Problem 789]

The figure below shows a right triangle ABC with the altitude BH and the bisector BD of the angle HBC. The incircle of radius r is tangent to AC at E. Prove that DE = r.



（解説）

$\angle ABH = 90^\circ - \angle CBH$ であり，

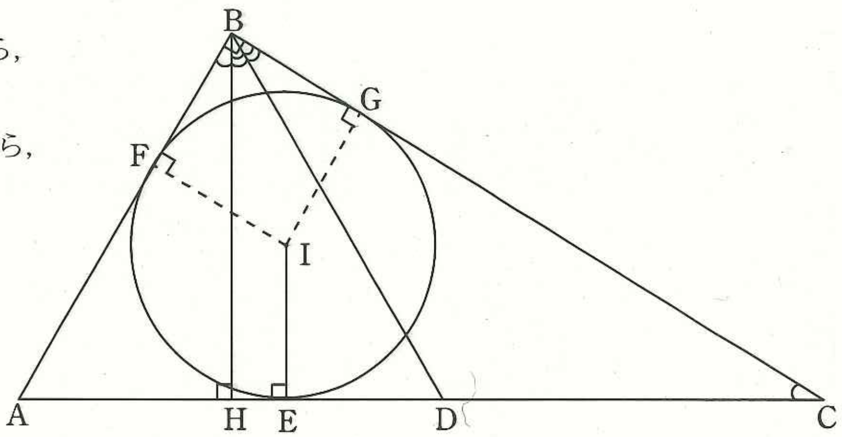
$\angle BCH = 90^\circ - \angle CBH$ であるから，

$\angle ABH = \angle BCH$

また，$\angle DBH = \angle DBC$ であるから，

$$\angle ABD = \angle ABH + \angle DBH = \angle BCD + \angle DBC = \angle ADB$$

よって，$\triangle ABD$ は，$AB = AD$ の二等辺三角形である．



一方，$\triangle ABC$ の内接円が辺 AB，BC とそれぞれ点 F, G と接するとすると，

$\angle BFI = \angle BGI = 90^\circ$

となり，$\angle FBG = 90^\circ$，$FI = GI = r$ であるから，四角形 BFIG は一辺が r の正方形となる．

ゆえに，$BF = r$

また，$\triangle AEI$ と $\triangle AFI$ において，

$\angle AEI = \angle AFI = 90^\circ$

$EI = FI = r$

$AI = AI$

であるから，$\triangle AEI \equiv \triangle AFI$

ゆえに，$AE = AF$

したがって，$DE = AD - AE = AB - AF = BF = r$ となる．