平成23年度　京都数学オリンピック道場　第３回　　　　　H23.12.18

1．【日本数学オリンピック　2000　予選問１】

$n=3a+5b$（a, b は0以上の整数）の形で表せない自然数 n の最大値を求めよ。

解答

まず, 自然数は必ず $n=3q+r$ (q は０以上の整数 , $r=0, 1, 2$) の形で一意的に表せる。

i）$r=0$ のときは,

$a=q$, $b=0$ とすれば良い。

ii）$r=1$ のときは,

$q \geqq 3$ なら,

$n=3q+1=3(q-3)+5\cdot 2$ の形で表せる。

したがって, $n=1, 4, 7$ の場合を除いて

$n=3a+5b$ の形で表せる。

iii）$r=2$ のときは,

$q \geqq 1$ なら,

$n=3q+2=3(q-1)+5\cdot 1$ の形で表せる。

したがって, $n=2$ の場合を除いて $n=3a+5b$ の形で表せる。

実際に, 1 , 2 , 4 , 7 が $3a+5b$ の形で表せないことは直ぐに確かめられる。

例えば, $7=3a+5b$ と表せたとすると, $0 \leqq a \leqq 2$ かつ $0 \leqq b \leqq 1$ であるが,

$(a,b)=(0,0), (0,1), (1,0), (1,1), (2,0), (2,1)$はいずれも $7=3a+5b$ を満たさない。

よって, $n=3a+5b$ の形で表せない自然数 n の最大値は７となる。……（答）

2．　100個の階乗 $1!, 2!, \cdots, 100!$ の積からどれか１つの階乗だけを取り除くと，この積がある数の平方数となる。どの階乗を取り除けばよいか求めよ。

解答

$1!\cdot 2!\cdots 100!$ について考える。

$(2m-1)!\cdot(2m)!=\{(2m-1)!\}^2\cdot 2m$

よって，平方数である $\{(2m-1)!\}^2$ を $(N_m)^2$ とおくと，

$1!\cdot 2!\cdot 3!\cdot 4!\cdots 100!$

$=1!\cdot 1!\cdot 2\cdot 3!\cdot 3!\cdot 4\cdots 99!\cdot 99!\cdot 100$

$=(1!3!5!\cdot\ \cdot 99!)^2\cdot 2^{50}(1\cdot 2\cdot 3\cdots 50)$

$=50!\cdot 2^{50}\cdot(1!3!5!\cdot\ \cdot 99!)^2$

ゆえに，50!を取り除けばよい。

次に，解が50!だけであることを確認する。

上記より，

$1!\cdot 2!\cdots\cdot 100!=50!\cdot n^2$ ……①　$(n=1!3!5!\cdots 99!\cdot 2^{25})$

とかける。

ここで，仮に解が50!以外に存在すると仮定すると，

$1!\cdot 2!\cdots\cdot 100!=A!\cdot m^2$ ……②　（m は任意の自然数）

を満たすような自然数 A $(A \fallingdotseq 50)$ が存在する。

①，②より，

$50!\cdot n^2=A!\cdot m^2$ ……③

（Ⅰ）$A\leqq 49$ のとき，

（ⅰ）$A=49$ のとき，③は，$50\cdot n^2=m^2$ となり，これを満たす自然数 m, n は存在しない。

（ⅱ）$A=48$ のとき，③は，$50\cdot 49\cdot n^2=m^2$ となり，これを満たす自然数 m, n は存在しない。

（ⅲ）$A=47$ のとき，③は，$50\cdot 49\cdot 48\cdot n^2=m^2$ となり，これを満たす自然数 m, n は存在しない。

（ⅳ）$A\leqq 46$ のとき，③は，$50\cdot 49\cdot 48\cdot 47\cdots(A+1)\cdot n^2=m^2$ となり，
左辺に素数47が一つしか存在しないので，$50\cdot 49\cdot 48\cdot 47\cdots(A+1)$ が平方数になることはない。ゆえに，これを満たす自然数 m, n は存在しない。

（Ⅱ）$A\leqq 51$ のとき，

（ⅰ）$A=51$ のとき，③は，$n^2=51\cdot m^2$ となり，これを満たす自然数 m, n は存在しない。

（ⅱ）$A=52$ のとき，③は，$n^2=52\cdot 51\cdot m^2$ となり，これを満たす自然数 m, n は存在しない。

（ⅲ）$A\geqq 53$ のとき，③は，$n^2=A\cdot(A-1)\cdots 53\cdot 52\cdot 51\cdot m^2$ となり，
右辺にに素数53が一つしか存在しないので，$A\cdot(A-1)\cdots 53\cdot 52\cdot 51$ が平方数になることはない。ゆえに，これを満たす自然数 m, n は存在しない。

したがって，求める解は50!のだけであることがわかる。……（答）

３．　9の倍数で2011桁の自然数Nがある。この数の各桁の合計をN_1, N_1の各桁の合計をN_2, N_2の各桁の合計をN_3とするとき，N_3はいくらか求めよ。

解答

例えば,

ｉ）9の倍数で2011桁の自然数Nを99999…99とすると,

$N_1=2011\cdot 9=18099$

$N_2=1+8+0+9+9=27$

$N_3=2+7=9$

となる。

ii）9の倍数で2011桁の自然数Nを909090…09とすると,

$N_1=1006\cdot 9=9054$

$N_2=18$

$N_3=9$

となる。

iii）9の倍数で2011桁の自然数Nを900000…00とすると,

$N_1=9$

$N_2=9$

$N_3=9$

となる。

では，一般的な話を考えてみる。

9の倍数で2011桁の自然数の中でN_1が最小となる自然数は，各桁の数字の和が 9だけなので,

100000…8 である。

また，条件を満たす自然数の中でN_1が最大の自然数は，すべての桁が9で埋め尽くされた

99999…99 である。

よって,

$100000\cdots 8 \leqq N \leqq 99999\cdots 9$となり,

$9 \leqq N_1 \leqq 9\times 2011=18099$

となる。

18099以下の数で，桁の数の合計が最大になる9の倍数は9999なので

$9 \leqq N_2 \leqq 9\cdot 4=36$

よって,

$9 \leqq N_3 \leqq 3+6=9$

これより,

$N_3=9$となる。……（答）

4．【2003年　広中杯トライアル問題】

ある国では，通貨に日本と同じ「円」が使われている。消費税も5％であるが，ただ一つ違うのは，消費税加算後の金額の1円未満を，切り捨てではなく四捨五入としていることである。

日本では，110円のものを買うと，5％加算して115.5円となり，これを小数点以下切り捨てることで115円，これが支払うべき金額となるが，この国では小数点以下を四捨五入して116円，これが支払うべき金額となる。

では，2011の倍数の金額で，このある国で消費税加算後の金額にはならない最小の金額はいくらになるか求めよ。

解答

消費税加算後の金額となり得ない値はどのような値かを考える。

金額 m を21で割ったときの商と余りをそれぞれ q，$r(0 \leqq r \leqq 20)$ とする。

このとき，

$$m=21q+r \quad \cdots\cdots ①$$

となる。

この金額 m に対する消費税加算前の金額を m' とし，m' を20で割った商と余りをそれぞれ q'，$r'(0 \leqq r' \leqq 19)$ とする。このとき

$$m'=20q'+r'$$

となる。

さて，m は $m' \times 1.05$ の小数点以下を四捨五入した値であるが，

$$m' \times 1.05=21q'+1.05r' \cdots\cdots ②$$

で，$21q'$ は整数であるから，四捨五入すべき値は $1.05r'$ である。

$r'=0, 1, 2, \cdots, 19$ のとき，$1.05r'$ を四捨五入した値は，次の表のようになり21未満である。

よって，①，②を比較して

$$q=q', \quad r=r' \times 1.05 \text{を四捨五入した値}$$

となることがわかる。

<table>
<tr><td>r'</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td rowspan="3">以下，同様に行うと，r の取り得ない値が10のみとわかる。</td></tr>
<tr><td>$r' \times 1.05$</td><td>0</td><td>1.05</td><td>2.1</td><td>3.15</td><td>4.2</td></tr>
<tr><td>四捨五入後</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr>
</table>

表より，r の取り得ない値は10のみとわかるので，①，③から，m として取り得ない値は

$$m=21q+10 \ (q \text{は0以上の整数})$$

と表せるもののみと分かる。

よって，求めるべきは，2011の倍数で，21で割った余りが10となるような最小の金額である。2011を21で割った余りは16であるから，$16k$ を21で割った余りが10となるような自然数 k を探せばよい。

よって，$k=19$ で初めて余りが10となることがわかる。

よって，求めるべき金額は

$$2011 \times 19 = 38209 \text{円} \cdots \text{（答）}$$

※ちなみに，36389円の消費税後の金額は，$36389 \times 1.05 = 38208.45$　より四捨五入して　38208円

36390円の消費税後の金額は，$36390 \times 1.05 = 38209.50$　より四捨五入して　38210円となり

よって，消費税後の金額として38209円にはならない。