平成23年度　京都数学オリンピック道場　第２回　　H23.11.27

１．【2003年　広中杯ファイナル問題１】

０～９までの数字が書かれたカードがそれぞれたくさんと，足し算の記号（＋）が書かれたカードがたくさんある。$1+2+3+\cdots\cdots\cdots+100$ をカードを用いて表したとき，以下の問いに答えよ。

（１）カードは合計何枚並べられているか。

（２）足し算の記号（＋）のカードを１枚抜いて，空いたスペースを詰めて計算すると，和は10000になった。どの＋の記号を抜いたのか答えよ。

たとえば，

$$1+2+3+\cdots\cdots+28+2930+31+\cdots\cdots+100$$

のようにカードを抜いたときは，「29と30の間のカード」というように答えよ。

解答

(1)　＋のカードは　$100-1=99$ 枚

$1\sim9$ を表すカードは　9枚

$10\sim99$ を表すカードは　$90\times2=180$ 枚

100を表すカードは　3枚　あるので，

$99+9+180+3=291$ 枚……（答）

(2)

1から100までの和は　$\dfrac{100\times101}{2}=5050$

であるから，＋のカードを１枚抜くことで，和が4950増えればよいことがわかる。

まず，１～９までの間，および99と100の間の＋を抜いても4950増えることはない。

そこで，a と $a+1$ の間の＋を抜くとする。ただし，a は $9\leqq a\leqq98$ 。

ここで，もとの和と比較してみると，

$1+2+3+\cdots\cdots\cdots+a+(a+1)+\cdots\cdots+100$ ……①

$1+2+3+\cdots\cdots\cdots+100a+(a+1)+\cdots\cdots+100$ ……②

②－①から，＋を抜くことで $99a$ だけ和が増えることがわかる。

よって，

$99a=4950$　　　$\therefore\ a=50$

したがって，

50と51の間の＋を抜けばよい。……（答）

２．　【2004年　日本数学オリンピック予選】

机の上にあるすべての硬貨を同時に投げ、裏が出た硬貨だけをみな机の上から取り除くという操作を考える。机の上に３枚の硬貨がある状態から初めて、硬貨がすべて取り除かれるまで、この操作を繰り返す。操作が４回以上行われる確率を求めよ。硬貨の表裏の出方は同様に確からしいものとする。

解答

３枚の硬貨を区別して考える。

３枚の硬貨の表裏の目の出方は$2^3=8$（通り）で、

２枚の硬貨の表裏の目の出方は$2^2=4$（通り）

３枚の硬貨、及び２枚の硬貨の表裏の出方は右の図１，２のようになる。

図１（３枚の硬貨）

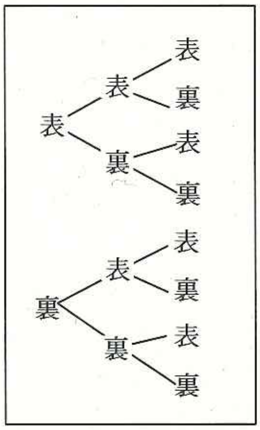
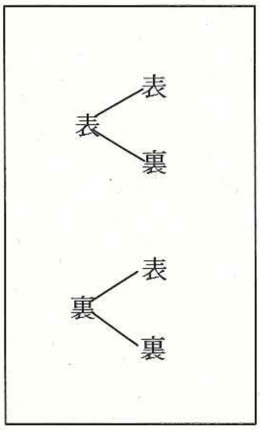


図２（２枚の硬貨）



(1)　操作が１回で終わるとき

１回目の操作ですべて裏が出ればよく，その出方は１通り。

よって確率は．$\dfrac{1}{8}$……（答）

(2)　操作が２回で終わるとき

右の図３のような場合が考えられるので，それぞれの確率は

図３（操作が２回で終わるとき）

1回目	表3 裏0	表2 裏1	表1 裏2
2回目	裏3	裏2	裏1

$$\frac{1\times1}{8\times8}=\frac{1}{64}\ ,\ \frac{3\times1}{8\times4}=\frac{3}{32},\ \frac{3\times1}{8\times2}=\frac{3}{16}$$

よって確率は，

$$\frac{1}{64}+\frac{3}{32}+\frac{3}{16}=\frac{19}{64}\cdots\cdots（答）$$

図４（操作が３回で終わるとき）

(3)　操作が３回で終わるとき，下の図４のような場合が考えられるので，

図４（操作が３回で終わるとき）

1回目	表3	表3	表3	表2 裏1	表2 裏1	表1 裏2
2回目	表3	表2 裏1	表1 裏2	表2	表1 裏1	表1
3回目	裏3	裏2	裏1	裏2	裏1	裏1

それぞれの確率は

$$\frac{1\times1\times1}{8\times8\times8}=\frac{1}{512}\ ,\ \frac{1\times3\times1}{8\times8\times4}=\frac{3}{256},\ \frac{1\times3\times1}{8\times8\times2}=\frac{3}{128}$$

$$\frac{3\times1\times1}{8\times4\times4}=\frac{3}{128}\ ,\ \frac{3\cdot2\times1}{8\times4\times2}=\frac{6}{64},\ \frac{3\times1\times1}{8\times2\times2}=\frac{3}{32}$$

よって確率は，

$$\frac{1}{512}+\frac{3}{256}+\frac{3}{128}+\frac{3}{128}+\frac{6}{64}+\frac{3}{32}=\frac{127}{512}$$

よって操作が４回以上行われる確率は，(1)(2)(3)の場合を除いたときの確率より

$$1-\left(\frac{1}{8}+\frac{19}{64}+\frac{127}{512}\right)=\frac{169}{512}\cdots\cdots（答）$$

３．　右の図のように３×３のマス目の中にそれぞれ１つずつ電灯が置かれている。それぞれの電灯にはスイッチがあり、それを押すことでＯＮ/ＯＦＦを切り替えられるが、何かの故障でそのときに上下左右の隣り合った電灯のＯＮ/ＯＦＦも切り替わってしまうようになってしまった。

①	②	③
④	⑤	⑥
⑦	⑧	⑨

例えば、⑤の電灯のスイッチを押すと②，④，⑤，⑥，⑧のＯＮ/ＯＦＦが切り替わり，③の電灯のスイッチを押すと②，③，⑥のＯＮ/ＯＦＦが切り替わる。

さて、①～⑨の電灯のＯＮ/ＯＦＦが最初どのような状態であっても、スイッチを押していくことで全ての電灯がＯＦＦである状態にできることを示せ。

解答

最初ＯＮである電灯は奇数回ＯＮ/ＯＦＦが切り替わればよく、最初ＯＦＦである電灯は偶数回切り替わればよい。つまり、ボタンを押す順番は関係ない。

任意の１か所の電灯のＯＮ/ＯＦＦを切り替える一連の操作が得られれば、それを組み合わせることで全ての電灯をＯＦＦにできる。

実際に、①のＯＮ/ＯＦＦを切り替える一連の操作は、⑥→⑧→③→⑦→①とスイッチを押すものである。（上で述べたとおり、実は順番は関係ない）。これを90°回転していくことで③，⑦，⑨のＯＮ/ＯＦＦを個別に切り替える操作が得られる。

次に、②のＯＮ/ＯＦＦを切り替える操作は、⑤→⑦→⑧→⑨とスイッチを押すものである。これもまた、90°回転していくことで④，⑥，⑧のＯＮ/ＯＦＦを個別に切り替える操作が得られる。

最後に、⑤のＯＮ/ＯＦＦを切り替える操作は、⑤を押した後に余分に切り替わった②，④，⑥，⑧を上で得られた操作によって個別に切り替えていけば得られる。（単にスイッチを⑤→②→④→⑥→⑧と押しても得られる。）

４．　ある小学校の卒業生８人が集まり，８人で同窓会を行なった。８人は久しぶりの再会で，お互いに握手を交わそうとしたが，時間の関係で握手を交わせなかった人の組がいくつかあった。そして，調べた結果，どの４人を選んでもその中には握手を交わせなかった人の組が含まれること，また，どの３人を選んでもその中には握手を交わした人の組が含まれることがわかった。

このとき，握手を交わしていなかった人の組の数としてありうる値をすべて求めよ。

解答

10，11，12

８人を８個の点で表し、握手を交わせなかった人どうしを辺で結んでできるグラフを考える。３以上８以下の整数nについて、グラフにnループがあるとは、ある点から、同じ辺を２度通らずにn本の辺をつたって元の点に戻ってくることができることをいう。問題文の仮定から、どの４点を選んでもその間に少なくとも１本は辺がある。

さて、奇数ループが存在しないとする。ある点Aに注目すると、自分自身も含めて８個の点は

(a)　Aから偶数本の辺をつたって到達できる（Aはこれに含まれる）

(b)　Aから奇数本の辺をつたって到達できる。

(c)　Aから辺をつたって到達できない。

のいずれか１つのみを満たす。なぜなら、(a)と(b)の２個を同時に満たすならば、奇数ループが存在してしまうからである。(a)を満たす点を白く塗り、(b)を満たす点を黒く塗る（同色の点同士は辺で結ばれないことに注意する。）そして、まだ色がついていないある点に注目してまだ同じこと繰り返すことにより、辺の両端点に別の色がつくように、８個の点を白、黒で塗り分けることができる。しかしこのとき、白い点と黒い点のどちらかは４点以上あるので、問題文の仮定より、辺で結ばれている同色の２点があることにより、これは矛盾である。

よって、奇数ループが存在する。問題文の仮定より３ループは存在しない。５ループも存在しないとすると、７ループＡＢＣＤＥＦＧがある。４点Ａ，Ｃ，Ｅ，Ｈを選び、ＡＨ間に辺があるとしてよい。４点Ｂ，Ｄ，Ｆ，Ｈを選び、ＦＨ間に辺があることになる。すると、４点Ｂ，Ｅ，Ｇ，Ｈを選ぶと、どこにも辺を入れられないので矛盾である。

よって、５ループＡＢＣＤＥが存在することになる。３ループが存在しないことから同じ点からは最高３本しか辺がでないことに注意する。残りの３点Ｆ，Ｇ，Ｈは３ループをなさないので、ＦＧ間に辺がないとしてよい。

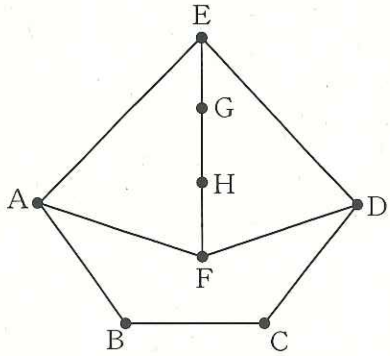
４点Ａ，Ｃ，Ｆ，Ｇを選び、ＦＡが辺で結ばれるとしてよい。

４点Ｂ，Ｅ，Ｆ，Ｇを選び、ＥＧが辺で結ばれるとしてよい。

４点Ｂ，Ｄ，Ｆ，Ｇを選び、ＤＦが辺で結ばれるとしてよい。

４点Ａ，Ｄ，Ｇ，Ｈを選び、ＧＨが辺で結ばれるとしてよい。

ＢＨとＣＨはともに辺で結ばれていないので、ＢＨ間に辺がないとすると、４点Ｂ，Ｅ，Ｆ，Ｈを選んで、ＦＨが辺で結ばれていることが確定する。



この状態ではどの４点を選んでもその間に１つ辺がある。

すなわち、条件を満たしている。ここから３ループを作らないように加えることができる辺は、ＢＧ，ＣＨ（もしくはＢＨ，ＣＧ）の２本のみである。よって、握手を交わしていなかった人の組の数は10，11，12である。・・・（答）