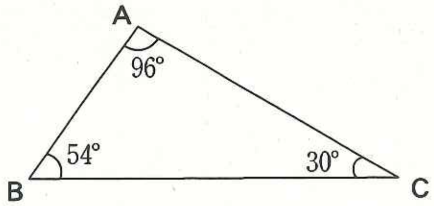
平成23年度　京都数学オリンピック道場　第１回　　H23.10.23

１．　『2001年　広中杯トライアル問題７』

右図の△ＡＢＣにおいて，∠Ａ＝96°，∠Ｂ＝54°，∠Ｃ＝30°，ＡＢ＝１のとき，ＡＣの長さを求めよ。



解答

求める辺ACの長さを x とする。

さて，△ABC を辺BC に関して対称に折り返し，△BDCを作ると, △ADCは正三角形となり，

AC＝AD＝x である。（図１を参照）

△ABDにおいて，∠ABD＝108° だから，

辺ADは，正五角形の対角線の長さに等しい。

正五角形を作ってみる。（図２ を参照）

図２ において，△ADP ∽ △DPQ となるから，

AD:DP＝DP : PQ

AD＝x より $x:1=1:x-1$

すなわち　$x^2-x-1=0$

この２次方程式を解くと、$x>0$ に注意して

$$x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\quad\cdots\cdots\ (\text{答})$$

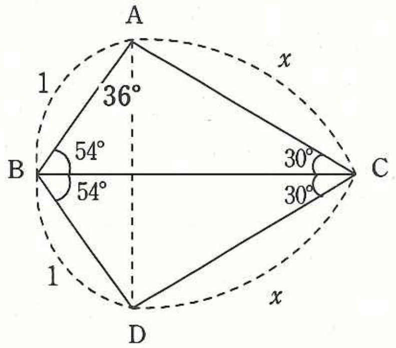


図１

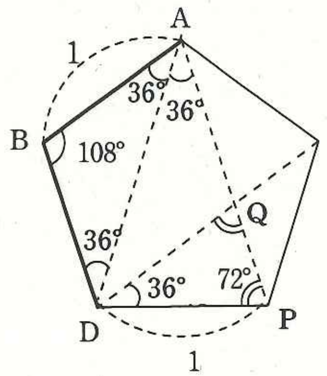
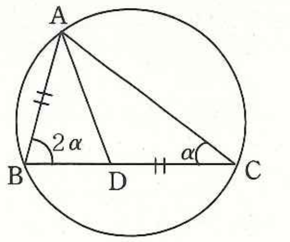


図２　正五角形

２．　『2001年　日本数学オリンピック予選　問題番号９』

右の図のように同一円周上に3点A，B，Cを$\angle ABC = 2\angle ACB$となるように$\triangle ABC$をつくる。

$\angle BAC$の二等分線と辺BCとの交点をDとする。$AB = CD$のとき$\angle BAC$を求めよ。



解答

$\angle ACB = \alpha°$とする。また，$\triangle ABC$の外接円Oと$\angle ABC$の二等分線との交点をＥとおく。

円周角の定理により，図1の角はすべて$\alpha°$である。

$AE /\!/ BC$と　$\angle ABC = \angle ECB = 2\alpha°$から，四角形ABCEは，等脚台形。よって，$AB = EC$…①

$\triangle ABE$は二等辺三角形だから，$AB = AE$…②

$AE /\!/ BC$と②から，$CD = AE$

よって，四角形ADCEは平行四辺形。

さらに①から，$AD = AB$である。図2より，$\angle ADB = 2\alpha°$（　）

$\angle DAC = \alpha°$，$\angle BAC = 2\angle CAD = 2\alpha°$

以上から，$\triangle ABC$の内角和は，$2\alpha° + 2\alpha° + \alpha° = 180°$

よって，$\alpha° = 36°$。したがって，$\angle BAC = 2\alpha° = 72$…（答）

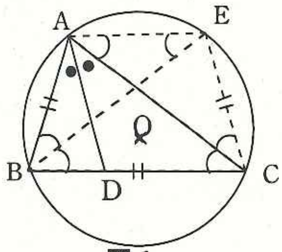


図１

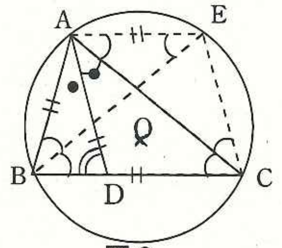


図２

<別解>

$\angle ABD$の二等分線とADとの交点をEとし，

$a = AB = CD$，$b = BD$

$\alpha° = \angle BAD = \angle DAC$，$\beta° = \angle ABE = \angle EBD = \angle ACD$

とする。

$\triangle ABE$と$\triangle ACD$について，　$\angle ABE = \angle ACD = \beta°$，

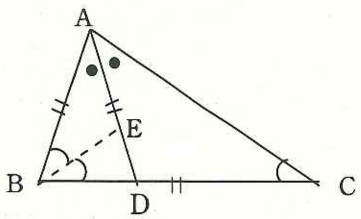
$\angle EAB = \angle DAC = \alpha°$　よって，$\triangle ABE \backsim \triangle ACD$である。

したがって，$AC = a \times \dfrac{AD}{AE}$ …①

また，BEは$\angle ABD$の二等分線であるから，

$AE : ED = AB : BD = a : b$となり

$\dfrac{AD}{AE} = \dfrac{a+b}{a}$である。…②



①と②より，$AC = a \times \dfrac{a+b}{a} = a + b = BC$

すなわち，$\triangle ABC$は二等辺三角形である。

二等辺三角形の底角は等しいから，

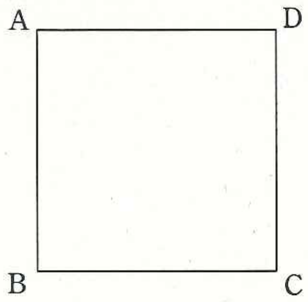
$2\alpha° = \angle CAB = \angle ABC = 2\beta°$

$\alpha° = \beta°$

$\triangle ABC$の内角和は，$2\alpha° + 2\alpha° + \alpha° = 180°$なので、$\alpha° = 36°$

したがって，$\angle BAC = 2\alpha° = 72°$…（答）

３．　下の図のように平面上に正方形ABCDが与えられているとき，直線をひくことだけで，辺ABの中点を作図せよ。



解答

辺ＢＣの延長上に，点Ｐを適当に取り，ＡＰとＣＤとの交点をＱとする。
ＡＣとＢＱとの交点をＲとし，ＰＲとＡＢとの交点をＭとすると，それは
ＡＢの中点となる。・・・（答）

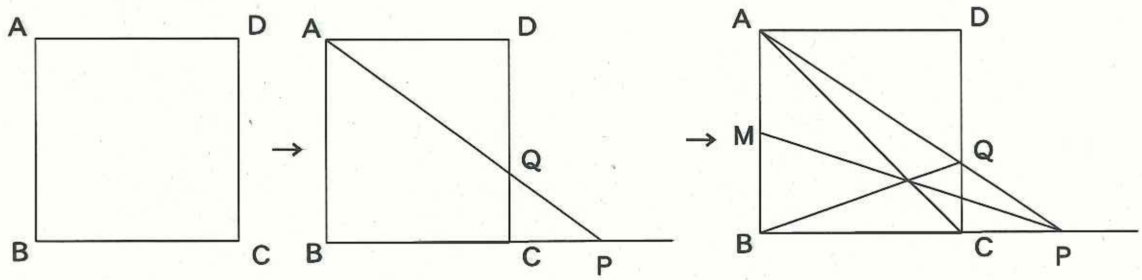
（証明）

△ＡＢＰに対してチェバの定理を用いる。ＡＢとＱＣは平行なので，

ＢＣ：ＣＰ＝ＡＱ：ＱＰに注意すると

$$1=\frac{AM}{MB}\times\frac{BC}{CP}\times\frac{PQ}{QA}=\frac{AM}{MB}$$

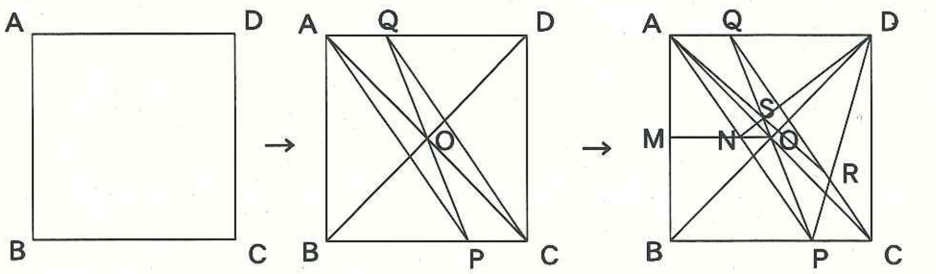
よって，ＡＭ＝ＭＢ



<別解>

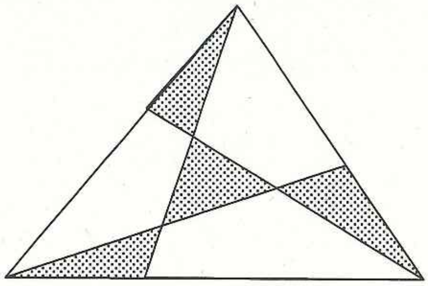
四角形ＡＢＣＤの対角線ＡＣと対角線ＢＤの交点をＯとする。

線分ＢＣ上に点Ｐをとり，線分ＰＯの延長線と線分ＡＤとの交点をＱとする。次に，線分ＰＤと線分ＣＱの交点をＲ,線分ＡＲと線分ＰＱの交点をＳ，線分ＤＳの延長線と線分ＡＰの交点をＮとするとＡＮ＝ＮＰとなり，線分ＯＮの延長線と線分ＡＢとの交点をＭとするとＡＭ＝ＭＢとなる。



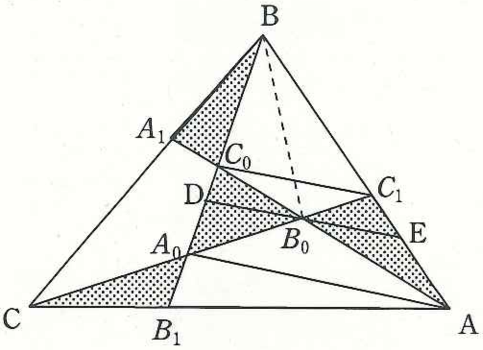
４．　『1983年　ソ連8年生　問8』

右の図に示した三角形において，塗りつぶした部分の４つの三角形の面積は等しいことがわかっている。図の３つの塗りつぶしていない部分の四角形の面積は等しいことを示せ。また，４つの三角形のそれぞれの面積を１としたときの四角形の面積を求めよ。



解答

図のように記号をつける。



$|\triangle A_0B_0C_0|=|\triangle AB_0C_1|$で，これらに$\triangle AA_0B_0$を加えると$|\triangle AB_0C_0|=|\triangle AA_0C_1|$がわかる。底辺$AA_0$からの高さを考えると$AA_0/\!/C_1C_0$がわかる。同様に，$BB_0/\!/A_1A_0$，$CC_0/\!/B_1B_0$である。

さて，B_0を通り，A_0Aと平行な直線がBB_1，BAと交わる点を各々D，Eとする。直線A_0AとC_0C_1の間の距離をhとすれば$|\triangle A_0B_0C_0|=\dfrac{1}{2}DB_0\cdot h$だから，$DB_0:B_0E=|\triangle A_0B_0C_0|:|\triangle AB_0C_1|=1:1$である。つまり，$B_0$は線分$C_0C_1$，$DE$，$A_0A_1$を二等分する。

また，直線BB_0はAA_0に平行であるから，中点連結定理により，点B_0は線分A_1Aの中点である。

よって，$\triangle AB_0C$と$\triangle B_0A_1C$の面積は等しく，四角形$AB_0A_0B_1$と$CA_0C_0A_1$の面積は等しい。

四角形$BC_0B_0C_1$の面積がこれと等しいことも同様にわかる。

これらの四角形の面積をSとする。比$BC_1:C_1A$を２通りに表現する。直線BB_0がC_0C_1の中点を通ることから$|\triangle B_0BC_1|=\dfrac{1}{2}S$である。

$$
\begin{aligned}
BC_1:C_1A&=|\triangle CBC_1|:|\triangle CC_1A|\\
&=(2S+2):(S+2)\\
&=|\triangle B_0BC_1|:|\triangle B_0C_1A|\\
&=\frac{S}{2}:1
\end{aligned}
$$

となる。

したがって，$(2S+2):(S+2)=\dfrac{S}{2}:1$である。

これを整理して，$S^2-2S-4=0$となり，この正の解として，$S=1+\sqrt{5}$を得る。･･･（答）