平成23年度　京都数学コンテスト　略解

$\boxed{1}$ (1)BC の中点をM，AM とBP の交点をE とおく。

AB＝AP (半径)，MB＝MP (半径)，AM＝AM (共通) であるから，

△ABM≡△APM (三辺相等) である。よって，∠EAB＝∠EAP

また，AB＝AP (半径)，AE＝AE (共通) であるから，△ABE≡△APE (二辺夾角相等)

である。よって，∠AEB＝∠AEP＝90°

これより，△ABM∽△AEB∽△BEM

AE : BE＝BE : EM＝AB : BM＝2 : 1より，AE : EM＝4 : 1 がわかる。

正方形ABCD の面積をS とおくと，

△ABM＝$\frac{1}{4}$S であるから，四角形ABMP＝$\frac{1}{2}$S

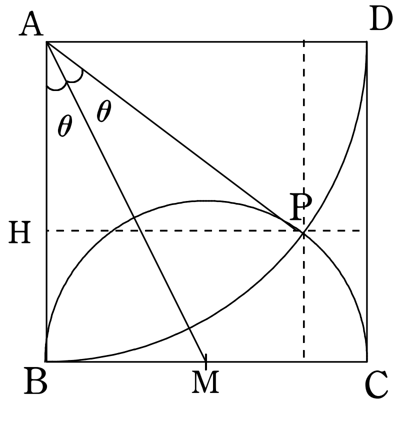
AE : EM＝4 : 1から，△ABP＝$\frac{2}{5}$S，△BPC＝2△BMP＝$\frac{1}{5}$S

また，△ABP＋△CDP＝$\frac{1}{2}$S，△BCP＋△DAP＝$\frac{1}{2}$Sであるので，

△CDP＝$\frac{1}{10}$S，△DAP＝$\frac{3}{10}$S

よって，△ABP : △BCP : △CDP : △DAP＝4 : 2 : 1 : 3……$\boxed{\text{答}}$

$\boxed{\text{別解}}$



正方形ABCDを１辺の長さが１の正方形とし，BCの中点をMとする。

∠MAB＝θ　とすると，

$\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$，$\cos\theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$

$\mathrm{PH} = \sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta = \frac{4}{5}$

$\mathrm{AH} = \cos 2\theta = \frac{3}{5}$

よって，$\frac{4}{5} : \frac{2}{5} : \frac{1}{5} : \frac{3}{5} = 4 : 2 : 1 : 3$

(2) 2011÷11＝182 余り9 より，182 付近の素数を探す。

157 , 163 , 167 , 173 , 179 , 181 , 191 , 193 , 197 , 199 , 211 は連続する 11 個の素数であり，

これらの和は 2011 である。したがって，求める数は 157……$\boxed{\text{答}}$

(3) 5 人のプレゼントのもらい方は，5! 通り。

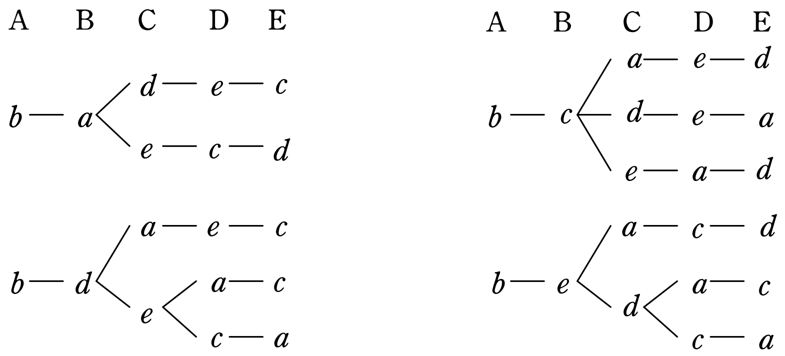
各人が他の人のプレゼントをもらうような場合の数を考える。

5 人をA，B，C，D，E とし，それぞれの持ってきたプレゼントを順に

a，b，c，d，e とする。

A は a をもらわないので，A がもらうプレゼントは b，c，d，e の 4 通りである。

たとえば，A が b をもらうとき，B，C，D，E のプレゼントのもらい方を樹形図で表すと，以下のようになる。



よって，A が b をもらうような場合の数は， 11 通り。

ゆえに，各人が他の人のプレゼントをもらうような場合の数は，11×4 通り。

したがって，求める確率は

$$\frac{11\times4}{5!}=\frac{11\cdot4}{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}=\frac{11}{30}\cdots\cdots\boxed{答}$$

別解

5 人のプレゼントのもらい方は，5!通り。

以下で，各人が他の人のプレゼントをもらうような場合の数を求めて，その確率を計算する。

プレゼントを持ってきた人からそのプレゼントを受け取った人への矢印を書くと，その矢印をたどることで，いくつかの輪ができる。（自分自身のプレゼントを受け取った場合や，2 人でプレゼントを交換した場合にも，それを輪と呼ぶことにしよう）

ある輪に含まれた人が，別の輪に含まれることはない。

このとき，求める場合において，考えられる状況は次の 2 つのみである。

(ⅰ) 5 人で1つの輪

(ⅱ) 2 人で1つの輪，残りの 3 人で1つの輪

これ以外では，必ず1人のみの輪ができる。それぞれの場合の数を計算すると

(ⅰ) 5 つのものの円順列と考えられて，4!通り

(ⅱ) 2 人と3 人に分ける方法が，${}_5C_2=10$通りで，3人の輪では再び円順列を考えて，2 通り。ゆえに10×2＝20通り

したがって，各人が他の人のプレゼントをもらう確率は， $\dfrac{(4!+20)}{5!}=\dfrac{11}{30}$

2 (1)正 n 角形の外角は $\dfrac{360°}{n}$ である。

よって，正 n 角形の内角は $180°-\dfrac{360°}{n}$ である。

3 つの内角が集まって頂点の回りを囲むとすると，

$$3\times\left(180°-\frac{360°}{n}\right)=360°$$

これを解くと，$n=6$

(2)正 n 角形の周囲を，正 m 角形ですき間なく敷きつめるときを考える。

$$\left(180°-\frac{360°}{n}\right)+2\cdot\left(180°-\frac{360°}{m}\right)=360°$$

180° で割って

$$1-\frac{2}{n}+2\left(1-\frac{2}{m}\right)=2$$

$$\frac{4}{m}+\frac{2}{n}=1$$

mn 倍して

$4n+2m=mn$

$(n-2)(m-4)=8$

よって，$n\fallingdotseq m$，$m\geqq3$，$n\geqq3$ を満たすような解は

$(n, m)=(10, 5), (4, 8), (3, 12)$

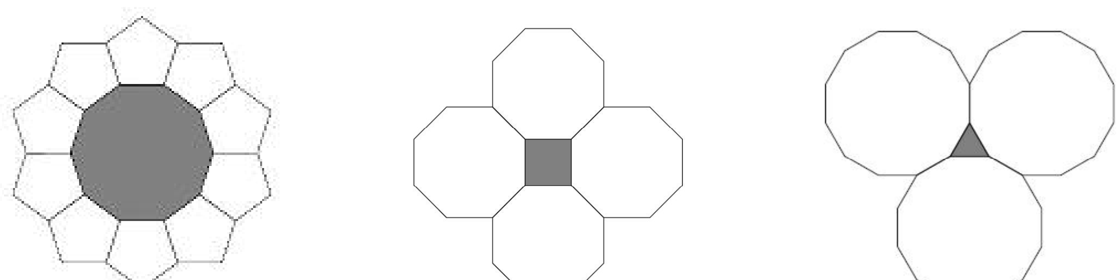
実際に

（ⅰ）正 10 角形の周囲を正 5 角形で，すき間なく敷きつめることができる。（図 1）

（ⅱ）正 4 角形の周囲を正 8 角形で，すき間なく敷きつめることができる。（図 2）

（ⅲ）正 3 角形の周囲を正 12 角形で，すき間なく敷きつめることができる。（図 3）

ゆえに，$(n, m)=(10, 5), (4, 8), (3, 12)$……答



(図 1)　(図 2)　(図 3)

$\boxed{3}$　n 進法で $2011_{(n)}$，m 進法で $23_{(m)}$ であるから $n \geqq 3$，$m \geqq 4$ である。
また，ある自然数に関する等式は，次のようになる。

$$2n^3+0n^2+1n+1=2m+3 \quad \cdots\cdots(*)$$

変形して

$$2n^3+n=2m+2$$

すなわち，次の条件を満たす自然数の組 (m, n) を求めればよい。

$$\begin{cases} n \geqq 3 \text{ かつ } m \geqq 4 & \cdots\cdots ① \\ 2n^3+n=2m+2 & \cdots\cdots ② \\ nm<2011 & \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

②より，$n=2m+2-2n^3=2(m+1-n^3)$ なので，n は偶数である。

そこで，①と合わせて，$n=4,\ 6,\ 8,\ \cdots$ を $m=\dfrac{2n^3+n-2}{2}$ ($\Leftrightarrow$ ②) に代入して調べていくことにする。

(ｉ) $n=4$のとき，$m=65$

これは，①，③も満たす。よって，$(n, m)=(4, 65)$ は適する。

(ⅱ) $n=6$のとき，$m=218$

これは，①，③も満たす。よって，$(n, m)=(6, 218)$ は適する。

(ⅲ) $n \geqq 8$ のときは，不適である。

実際，$m=\dfrac{2n^3+n-2}{2} \geqq \dfrac{2 \cdot 8^3+8-2}{2}=515$ なので，

$nm \geqq 8 \cdot 515=4120 \geqq 2011$ となり，③を満たさない。

以上より，求める (n, m) の組は

$(n, m)=(4, 65), (6, 218)$ ………$\boxed{\text{答}}$

実際に確認すると，

(ｉ)の場合，(*) の右辺に$m=65$を代入すると，ある自然数は 133 であり，

$$133=2 \cdot 4^3+0 \cdot 4^2+1 \cdot 4^1+1 = 2011_{(4)} \qquad 133=2 \cdot 65+3 = 23_{(65)}$$

(ⅱ)の場合，(*) の右辺に $m=218$ を代入すると，ある自然数は 439 であり，

$$439=2 \cdot 6^3+0 \cdot 6^2+1 \cdot 6^1+1 = 2011_{(6)} \qquad 439=2 \cdot 218+3 = 23_{(218)}$$

4　辺の長さは関係ないので，図1で考えてもよい。

そこで更に，ストローでできた辺をそれぞれ1点につぶした図 2を考える。

図1において，ストローでできた辺は何回通ってもよいので，【条件】にしたがう経路は図2の一筆書きの経路と1対1に対応する。したがって問題を次のように言い換えてよい。

『図2において，点Aを出発して点Aにもどってくる一筆書きの経路は全部で何通りあるか求めない。』

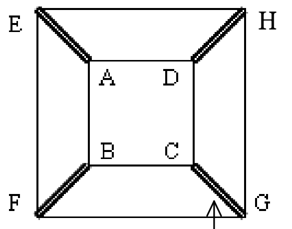


図1

ストロー

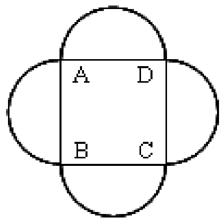


図2

【STEP 1】

点Aを出発して点Aにもどるまでの間，点B,C,Dは2回ずつ，点Aは1回だけ通ることになる。まず，それらを通る順番が何通りあるかを求める。

はじめにA→ Bと進むとする。

(a) 1周して点A に戻るまでに点B か点C か点D で折り返した場合，その後の点を通る順番が1通りしかないことがわかる。（例えば，点Cで折り返した場合，A→B→C（折り返し） →B→A→D→C（再び折り返し）→D→Aと進むしかない。）

よって，はじめにどの点で折り返すかの選び方で完全に決まり，点を通る順番は3通りある。

(b)点B や点C や点D で折り返すことなく1周して点 A に戻った場合は，その後，A→B→C→D→A の順で再び1周するか，その逆順で1周するかの 2通りがある。

(a)(b)より，はじめにA→Bと進んだ場合は点を通る順番は2+3＝5通りある。

はじめにA→Dと進んだ場合も同様なので，点を通る順番は合計で10通りある。

【STEP 2】

次に，点と点の間を，どちらの辺を選んで移動するかを考える。

各頂点間について，そこを初めて通るときには，どちらの辺を通るかを選択できるが，2回目に通るときにはまだ通っていない方の辺を通るしかない。点Aと点B，点Bと点C，点Cと点D，点Dと点Aの間それぞれについて2通りずつの選択ができるから，

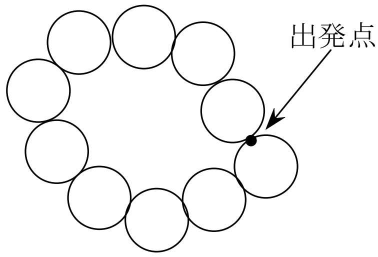
全体で$2^4＝16$通りある。

STEP 1，2より，図2を点Aから出発する一筆書きの経路は全部で10×16＝160通りある。

したがって，もとの問題の経路も全部で160通りである。………答

＜参考＞

一般にn個の円が数珠つなぎになっている一筆書きは，どこかで円を完成させて戻る方法がn通り，円を完成させないで戻る方法が1通りある。それぞれに出発点で進む方向が2通りある。また，n個の円の進み方は2通りずつある。



ゆえに，$2(n+1)2^n=(n+1)2^{n+1}$

5 (1) 図 1から　△ACD∽△CDF である。

したがって，AC:CD＝CD : DF

対角線の長さ x ＝AC より $x : 1 = 1 : x-1$

すなわち　$x^2-x-1=0$

この2 次方程式を解くと，$x>0$ に注意して

$$x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$　……　答

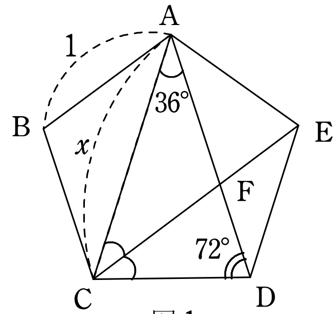


図1

(2)

< 正十二面体 の切断による方法 >

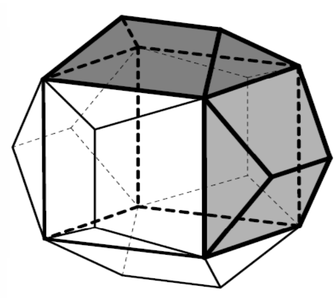


図 2

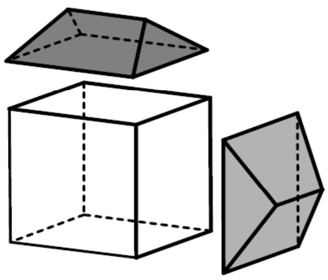


図 3

1辺の長さが1である正十二面体(図2)を図3のように切断すると，1辺の長さが

$x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ である立方体1個 と，屋根形6個ができることがわかる。

したがって，$\alpha+\beta=90°$　……答　(図4参照)

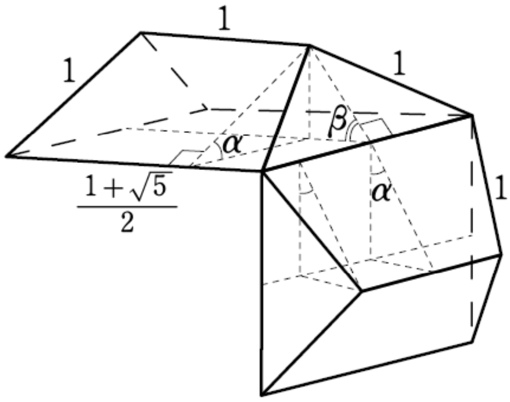


図4

$\boxed{\text{別解}}$< 三角関数による方法 >

図 5のように，5点 P, Q, R, S, T をとる。

また、$x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ は、2次方程式 $x^2-x-1=0$ の解である。

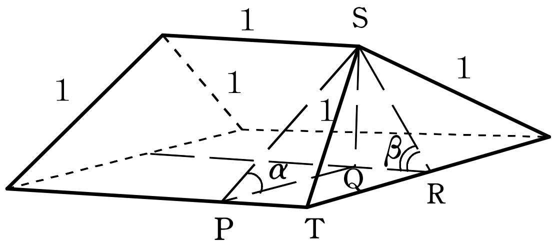


図5

屋根形の対称性より， $\mathrm{TR}=\mathrm{PQ}=\dfrac{x}{2}$, $\mathrm{RQ}=\mathrm{TP}=\dfrac{x-1}{2}$ がわかる。

また，$\mathrm{PS}=\sqrt{\mathrm{ST}^2-\mathrm{TP}^2}=\sqrt{1^2-\left(\dfrac{x-1}{2}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{2+x}}{2}$

$\mathrm{RS}=\sqrt{\mathrm{ST}^2-\mathrm{TR}^2}=\sqrt{1^2-\left(\dfrac{x}{2}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{3-x}}{2}$

以上から，$\cos\alpha=\dfrac{\mathrm{PQ}}{\mathrm{PS}}=\dfrac{\frac{x}{2}}{\frac{\sqrt{2+x}}{2}}=\dfrac{x}{\sqrt{2+x}}$ ， $\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\dfrac{1}{\sqrt{2+x}}$

$\cos\beta=\dfrac{\mathrm{RQ}}{\mathrm{RS}}=\dfrac{\frac{x-1}{2}}{\frac{\sqrt{3-x}}{2}}=\dfrac{x-1}{\sqrt{3-x}}$ ，$\sin\beta=\sqrt{1-\cos^2\beta}=\dfrac{1}{\sqrt{3-x}}$

したがって，

$$\begin{aligned}\cos(\alpha+\beta)&=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta\\&=\frac{x}{\sqrt{2+x}}\cdot\frac{x-1}{\sqrt{3-x}}-\frac{1}{\sqrt{2+x}}\cdot\frac{1}{\sqrt{3-x}}\\&=\frac{x^2-x-1}{\sqrt{(2+x)(3-x)}}\\&=0\end{aligned}$$

$0°<\alpha+\beta<180°$より，$\alpha+\beta=90°$ …… $\boxed{\text{答}}$

$\boxed{\text{別解}}$ ＜ 三平方の定理による方法 ＞

図５の２つの直角三角形 PQS とRQS に注目する。この２つの直角三角形を，1つの平面でつなげると，図６のように１つの三角形SPR ができる。

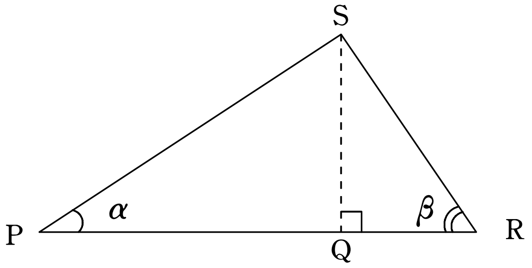


図６

各辺の長さの２乗を計算すると，

$$\mathrm{PS}^2 = \frac{2+x}{4}, \quad \mathrm{RS}^2 = \frac{3-x}{4}$$

$$\mathrm{PR}^2 = (\mathrm{PQ}+\mathrm{QR})^2 = \left(\frac{x}{2}+\frac{x-1}{2}\right)^2 = \left(\frac{2x-1}{2}\right)^2 = \frac{4x^2-4x+1}{4} = \frac{5}{4}$$

ここで，$x^2-x-1=0$ であることを用いた。

以上から，$\mathrm{PS}^2+\mathrm{RS}^2=\mathrm{PR}^2$が成り立つので， 三平方の定理の逆より，$\angle\mathrm{RSP}=90°$

したがって，$\alpha+\beta=180°-\angle\mathrm{RSP}=90°$ ‥‥‥ $\boxed{\text{答}}$