京都数学グランプリ 2011　1 st ステージ

平成23年度

京都数学コンテスト

注　　意　　事　　項

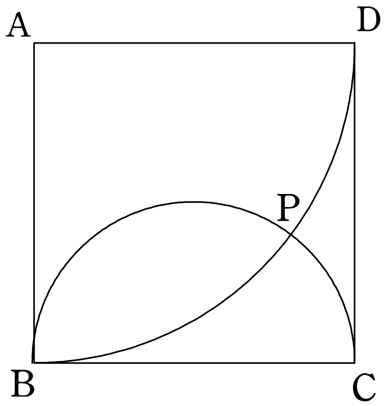
1　問題は，1 ページから 6 ページにあります。
2　解答用紙は，全部で 5 枚あります。
3　コンテスト番号と氏名をすべての解答用紙に記入してください。
4　解答は，問題番号に対応した解答用紙にすべて記入してください。
5　解答時間は 3 時間です。なお，トイレ等に行く場合は監督の指示に従ってください。

$\boxed{1}$　次の各問いに答えなさい。

(1)　正方形ABCDがあり，頂点A を中心 とする半径AB の円弧と辺B C を直径とする円弧を考え，点 B 以外の交点を P とする。このとき，三角形の面積比

　△ABP : △BCP : △CDP : △DAP

を求めなさい。



(2)　素数を小さい方から順に並べると，次のような数の列ができる。

2，3，5，7，11，・・・・・・・

この数の列で，連続する 11 個の数の和が 2011 になる部分がある。このとき，この部分の先頭の数を求めなさい。

(3)　5 人がパーティーにプレゼントを 1 個ずつ持ち寄って，くじ引きでプレゼントを交換する。このとき，各人が他の人のプレゼントをもらう確率を求めなさい。

$\boxed{2}$　1 枚の正 n 角形の周囲を n 枚の正 m 角形ですき間なく敷きつめることを考える。ただし，次の 2 つの【条件】をつける。

【条件】
（Ⅰ） n 枚の正 m 角形は，それぞれが与えられた正 n 角形と 1 辺を共有する 。
（Ⅱ） 正 n 角形 の 隣り合う 2 つの辺に対して，その辺を共有する 2 つの正 m 角形どうしは，1 辺を共有する。

この条件が満たされるとき，正 n 角形の周囲を正 m 角形ですき間なく敷きつめることができるという。

例 ： 下の図 1 のように，正六角形を 6 枚の正六角形ですき間なく敷きつめることはできる。
しかし，下の図 2 のように，正三角形を 3 枚の正方形ですき間なく敷きつめることはできない。

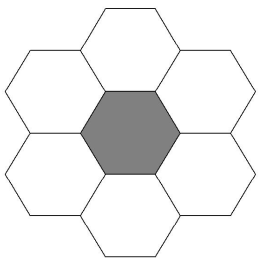


図 1

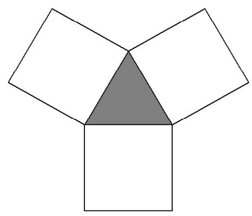


図 2

次の各問いに答えなさい。

(1) 正 n 角形の周囲を正 n 角形ですき間なく敷きつめることができるのは，$n=6$のときに限ることを示しなさい。

(2) n と m が等しくない場合に，正 n 角形の周囲を正 m 角形ですき間なく敷きつめることができるような（n，m）の組をすべて求めなさい。

【裏へ続く】

$\boxed{3}$ 数の表し方に n 進法というものがある。 n 進法では，0 から $n-1$ までの数字のみを用いて表す。n 進法であることを明らかにするため，右下に $_{(n)}$ をつける。

ただし，10 進法では $_{(10)}$ を省略する。

例： 2 進法で表された数 110101 は，$110101_{(2)}$ と書き，その数を 10 進法で表すと次のようになる。

$$\begin{aligned}110101_{(2)} &= 1\cdot 2^5+1\cdot 2^4+0\cdot 2^3+1\cdot 2^2+0\cdot 2^1+1\cdot 2^0\\ &= 32+16+0+4+0+1\\ &= 53\end{aligned}$$

ただし，$2^0=1$ とする。

次の問いに答えよ。

ある自然数を n 進法で表すと $2011_{(n)}$ であり，m 進法で表すと $23_{(m)}$ になるという。
n と m の積は，2011 より小さい。このような (n, m) の組をすべて求めなさい。

【　余　　　白　】

【裏へ続く】

$\boxed{4}$　割りばし8本とストロー4本で下図のように，直方体のわくを作る。

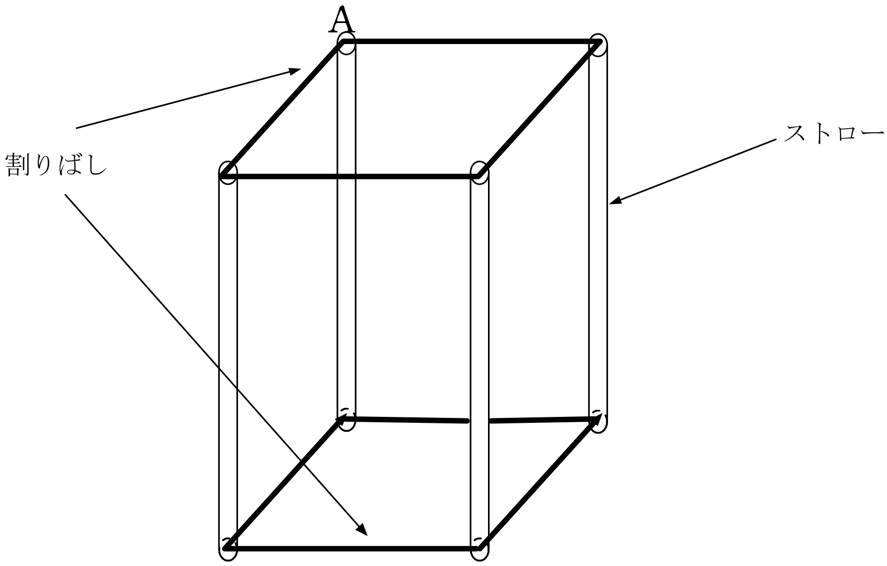
頂点Aから出発して，次の【条件】にしたがって再び頂点Aにもどる経路は，全部で何通りあるか求めなさい。

【条件】

（Ⅰ）　割りばしでできた辺は，ちょうど1回ずつ通る。

（Ⅱ）　ストローでできた辺は何回通ってもよいし，通らなくてもよい。

（Ⅲ）　どの頂点に着いたときも、直前に通った辺をもどってはいけない。



$\boxed{5}$　次の各問いに答えなさい。

(1)　図１は，１辺の長さが１である正五角形である。
対角線の長さ x を求めなさい。

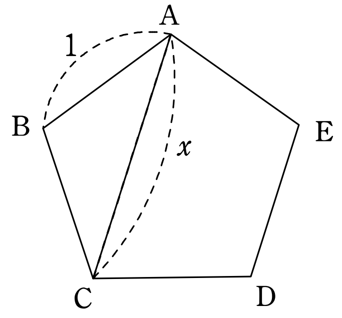


図１

(2)　図２の立体は，(1) で求めた x を１辺とする正方形を底面とし，図１の三角形ABCと合同な三角形を２つと，図１の台形ACDEと合同な台形２つを組み合わせてできた５面体である。この５面体を屋根形と呼ぶことにする。

この屋根形の２種類の斜面の傾斜角を図２のようにそれぞれ α，β とするとき，$\alpha+\beta$ を求めなさい。

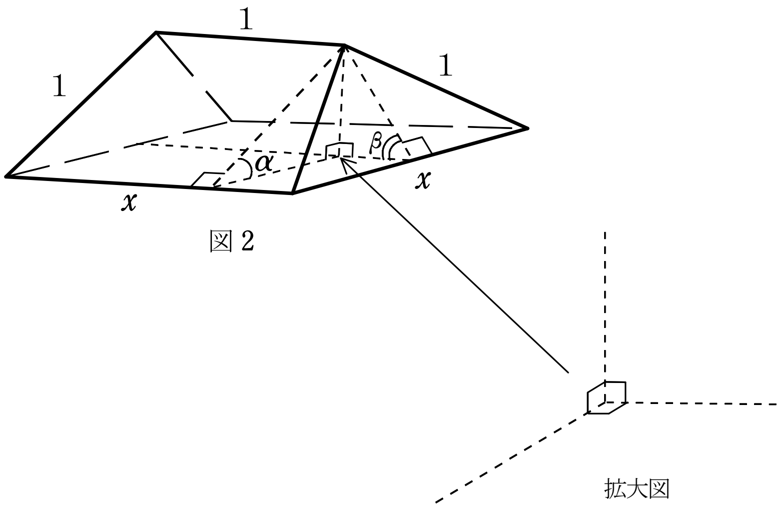


図２

拡大図

【終わり】