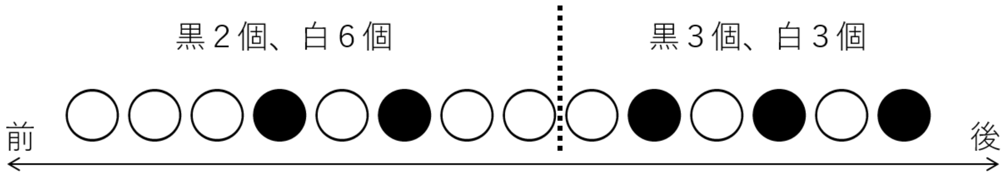
$\boxed{1}$

黒い玉5個と白い玉9個を一列に並べる。次の（条件A）を満たす並べ方は何通りか。

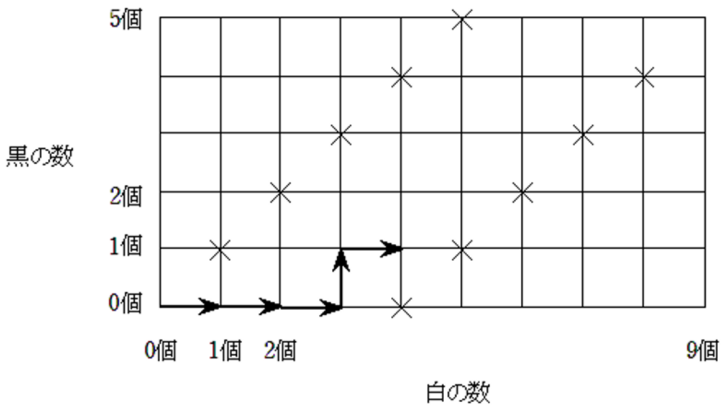
(条件A) どのように点線で2つに区切っても、その前後の組の両方で黒玉と白玉の個数が異なる。

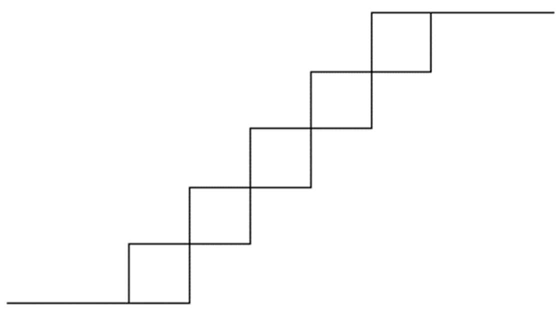


上の図は、点線の後ろで黒と白の個数が等しくなっているので、条件を満たさない例である。

【解答】

前から順番に黒い玉と白い玉を並べていくことを考えると、その個数は下の図の格子上の点に対応する。したがって、この図の左下から右上まで×印を通らずに進む方法の数を考えればよい。





これには、実際上のような図を考えれば十分であるから、求める並べ方の数は $2^5 = 32$ 通り

$\boxed{2}$

座標平面内の点のうち、x 座標と y 座標がともに整数である点を格子点と呼ぶ。次の条件を満たす自然数 n の最大値を求めよ。

(条件)

ある n 個の格子点からなる集合 A が存在して、A のうちのどの 2 点を結ぶ線分も端点の他に格子点を通らない。

【解答】

答えは $n = 4$ である。 実際、$A = \{(0,\ 0),\ (0,\ 1),\ (1,\ 0),\ (1,\ 1)\}$ は条件を満たす。もし集合 A が 5 個以上の格子点をふくめば、鳩ノ巣原理により、A のある 2 点は x, y 座標の偶奇が全て等しい。これはこの 2 点の中点が格子点であることに他ならない。

$\boxed{3}$ (AIME1985 改題)

n は自然数とする。 $a_n = n^2 + 2018$ に対し、a_n と a_{n+1} の最大公約数を d_n とする。 d_n が最大となる最小の n の値を求めよ。

【解答】

整数 m，n の最大公約数を $g(m, n)$ と表すことにする。

$$(n+1)^2 + 2018 = (n^2 + 2108) + 2n + 1$$

であるから，ユークリッドの互除法により

$$d_n = g((n+1)^2 + 2018, n^2 + 2018) = g(n^2 + 2018, 2n + 1)$$

$2n + 1$ は奇数であるから，4 と互いに素であるので，

$$g(n^2 + 2018, 2n + 1) = g(4(n^2 + 2018), 2n + 1)$$

また

$$4(n^2 + 2018) = (2n + 1)(2n - 1) + 8073$$

であるから，ユークリッドの互除法より

$$g(4(n^2 + 2018), 2n + 1) = g(2n + 1, 8073)$$

よって

$$d_n = g(2n + 1, 8073)$$

ゆえに，d_n が最大となるのは $2n + 1$ が 8073 の倍数となるときであり (最大値は 8073) 、そのような最小の n は $2n + 1 = 8073$ より 4036 である。

$\boxed{4}$ (京都大学 2016 理系数学第 2 問)

素数 p, q を用いて、$p^q + q^p$ と表される素数をすべて求めよ。

【解答】

p, q の偶奇が等しいとき、$p^q + q^p$ は 2 より大きな偶数となり、素数ではない。よって、p, q の偶奇は異なる。
p, q の対称性から、$p = 2, q$ を奇素数として一般性を失わない。
$q = 3$ のとき、

$$p^q + q^p = 2^3 + 3^2 = 17$$

は素数である。
$q \geqq 5$ のとき、

$$\begin{aligned} 2^q + q^2 &\equiv (-1)^q + q^2 && (\mathrm{mod}\, 3) \\ &\equiv -1 + q^2 && (\mathrm{mod}\, 3) \qquad (\because q \text{ は奇数}) \\ &\equiv (q+1)(q-1) && (\mathrm{mod}\, 3) \end{aligned}$$

となる。q は 3 の倍数でないので、$q \pm 1$ のどちらかは 3 の倍数になり、$2^q + q^2$ は 3 の倍数である。これと $2^q + q^2 > 3$ より、$2^q + q^2$ は素数でない。
以上より、求める素数は 17 である。

$\boxed{5}$

あるパン屋が、40日間で60個のパンを作る。このパン屋が1日に最低1個はパンを作ったとすると、ある連続した何日間かにわたってちょうど19個のパンを作ることが必ずあることを示せ。

【解答】

作ったパンの累計の個数を a_1，a_2，a_3，……，a_{40} とする。a_1+19，a_2+19，a_3+19，……，$a_{40}+19$ という数を考えると、$a_{40}+19=79$ であるから鳩ノ巣原理より「a_1，a_2，a_3，……，a_{40}，a_1+19，a_2+19，a_3+19，……，$a_{40}+19$」の80個の自然数に、等しい組が存在する。

$a_1<a_2<a_3<\cdots\cdots<a_{40}$ であるから、a_i と a_j の組、および a_i+19 と a_j+19 の組が等しくなることはない。

よってある自然数 i，j について $a_i=a_j+19$ が成り立つ。

したがって、$j+1$ 日目から i 日目にかけて19個のパンを作っている。

【別解】

作ったパンの累計の個数を a_1，a_2，a_3，……，a_{40} とする。これを19で割った余りで分類すると、鳩ノ巣原理より「a_1，a_2，a_3，……，a_{40}」の40個の自然数のうち3つの余りが等しい。

これを $a_i,\ a_j,\ a_k$ とする（$a_i<a_j<a_k$）。a_j-a_i と a_k-a_j のどちらも19でなかったとすると、$a_j-a_i \geqq 38,\ a_k-a_j \geqq 38$ であるから $a_k \geqq a_i+76$ で、これは $a_{40}=60$ に矛盾する。

したがって、$i+1$ 日目から j 日目にかけて、もしくは $j+1$ 日目から k 日目にかけて19個のパンを作っている。

$\boxed{6}$ (IMO 1963)

5人の生徒A,B,C,D,Eが競技をしている。ある予想では競技の順位はABCDEの順であるという。しかし、この予想は大きくはずれた。現実には、どの生徒も予想された順位ではなかったし、順位が連続して並ぶと予想されたどの2人の生徒もそのように並ばなかった。別の予想では、競技の順位はDAECBの順であるという。この予想は少しはましで、丁度2人の順位は正しく、また、丁度2組の生徒たちの順位が連続することを正しく言い当てた。実際の順位はどのようであったか答えよ。

【解答】

DAECBは2組の生徒たちの順位が連続することが正しい。順位が連続する2組の生徒の可能性は、

（1）DAとEC　（2）DAとCB　（3）AEとCB

のいずれかである。そのうち「DAECBには正しい順位の生徒が丁度2人含まれている」という条件を満たす順列は、

（1）ではDABEC　（2）ではDACBEとEDACB　（3）ではAEDCB

のみである。このうち、さらに、「ABCDEには正しい順位に生徒がいない」、「ABCDEには正しく順位が連続する生徒の組は含まれていない」という2条件を満たすものはEDACBのみである。

$\boxed{7}$ （JMO 予選 1993）

座標平面上の 3 点 $(0,0),(276,153),(a,b)$ を頂点とする三角形の面積が 2 以下になるように、正整数 a,b を選ぶ。このような点 (a,b) のうち、原点に最も近いものを求めよ。

【解答】

問題の三角形の面積は　$\dfrac{1}{2}|\,153a-276b\,|$　　（ただし $153a-276b\neq 0$）

これが 2 以下なので　$\dfrac{1}{2}|\,153a-276b\,| \leqq 2$

よって　$|\,51a-92b\,| \leqq \dfrac{4}{3}$

左辺は整数なので $51a-92b=\pm 1$ となる。
ユークリッドの互除法を用いて a,b を求めると $(a,b)=(9,5)$

【注意】

$153a-276b=0 \Longleftrightarrow \dfrac{b}{a}=\dfrac{153}{276}\ \left(=\dfrac{51}{92}\right)$　であるから
3 点 $(0,0),(276,153),(a,b)$ が一直線上に並ぶとき、三角形はできない。（面積は 0 である。）

$\boxed{8}$ (IMO 1996)

$GCD(m,n)=1$ となる自然数 m,n に対して $GCD(5^m+7^m,5^n+7^n)$ を求めよ。ただし，$GCD(m,n)$ は m と n の最大公約数を表す。

（解法）

$m>n$ としても一般性は失われない。

$2n\geqq m$ のとき

$$\begin{aligned}5^m+7^m&=(5^n+7^n)(5^{m-n}+7^{m-n})-5^n7^{m-n}-7^n5^{m-n}\\&=(5^n+7^n)(5^{m-n}+7^{m-n})-5^{m-n}7^{m-n}(5^{2n-m}+7^{2n-m})\end{aligned}$$

より

$$GCD(5^m+7^m,5^n+7^n)=GCD(5^n+7^n,5^{m-n}7^{m-n}(5^{2n-m}+7^{2n-m}))$$

5^n+7^n は 5 でも 7 でも割り切れないから

$$GCD(5^m+7^m,5^n+7^n)=GCD(5^n+7^n,5^{2n-m}+7^{2n-m})$$

$m>2n$ のとき，同様にして

$$GCD(5^m+7^m,5^n+7^n)=GCD(5^n+7^n,5^{m-2n}+7^{m-2n})$$

ここで，$g_{m,n}=GCD(5^m+7^m,5^n+7^n)$ とすると，

$$\begin{aligned}&2n\geqq m\text{ のとき}\quad g_{m,n}=g_{n,2n-m}\\&m>2n\text{ のとき}\quad g_{m,n}=g_{n,m-2n}\end{aligned}$$

m，n が互いに素な整数であり，$m+n$，$n+(2n-m)$，$n+(m-2n)$ の偶奇は一致することから，上の関係を用いて，$g_{m,n}$ の添え字の和が小さくなるように変形を繰り返すと，(※)

$$\begin{aligned}&m+n\text{ が奇数のとき}\quad g_{m,n}=g_{1,0}=GCD(12,2)=2\\&m+n\text{ が偶数のとき}\quad g_{m,n}=g_{1,1}=GCD(12,12)=12\end{aligned}$$

(※) 例えば，$g_{12,7}=g_{7,2}=g_{3,2}=g_{2,1}=g_{1,0}$