1 ［2005 年　広中杯（ファイナル）］(改題)

縦の長さも横の長さも整数であるような，正方形でない長方形の形をした紙がある。この紙に対して，次のような〈操作〉を繰り返す。

〈操作〉　その長方形に含まれる，最大の正方形を切り落とす。

〈操作〉の後の紙が長方形であれば〈操作〉を続け，〈操作〉の後の紙が正方形であれば，そこで〈操作〉を終わる。〈操作〉が終わるまでの回数を，元の長方形の「耐数」，最後に残った正方形の 1 辺の長さを，元の長方形の「基本サイズ」ということにする。

たとえば，2×5 の長方形は，耐数 3，基本サイズ 1 である。

（１）　144×233 の長方形の耐数，基本サイズを求めよ。

（２）　短い方の辺の長さが整数，長い方の辺の長さが 350 である長方形で，耐数が 4 であるようなものはいくつあるか。

（３）　短い方の辺の長さが整数，長い方の辺の長さが 800 である長方形で，基本サイズが 2 であるようなものはいくつあるか。

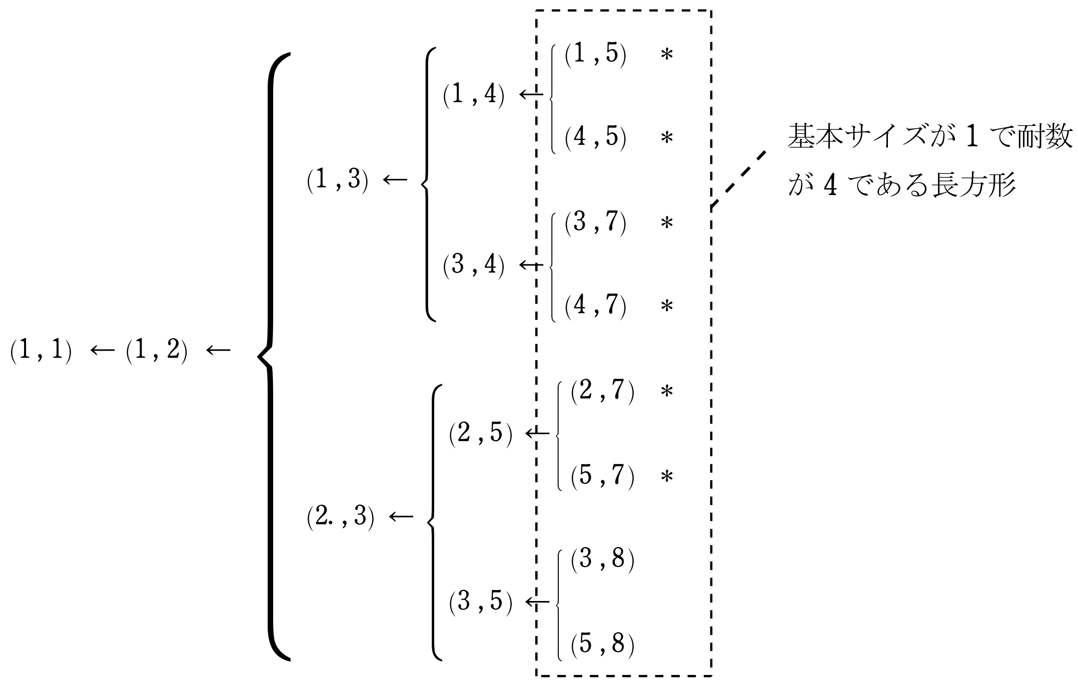
（４）　$(3^{21}-1)\times(3^{18}-1)$ の長方形の基本サイズを求めよ。

解答　144×233 の長方形から 144×144 の長方形を切り落とすと，$233-144=89$ なので 144×89 の長方形が残る。この過程を （144,233） → （89,144） と表すことにする（右側に長い方の辺を書く）。

（１）（144,233） → （89,144） → （55.89） → （34,55） → （21,34） → （13,21） → （8,13） → （5,8） → （3,5） → （2,3） → （1,2） → （1,1）

となるので，耐数は 11，基本サイズは 1

（２）基本サイズが 1 のものから，〈操作〉を逆にたどることで耐数が 4 である長方形を作ることを考えると，以下の通りそのような長方形は 8 通りできる。



これらのうち，長い方の辺の長さが 350 の約数であるものは，長方形の短い方の辺，長い方の辺をともに整数倍することで条件を満たす長方形となる。そのような長方形は＊で示した 6 通りに限る。したがって，6 個

（３）基本サイズは 2 辺の長さの最大公約数であるから，800 との公約数が 2 である 自然数のうち，800 以下の自然数の個数を求めればよい。これは，400 以下の自然数のうち，400 と互いに素な自然数の個数に等しい。

$400=2^4\times5^2$ であるから，そのような自然数は一の位の数が 1，3，7，9 であるものとなり，全部で $400\times\dfrac{4}{10}=160$ 個となる。

別解

短い方の辺の長さを x とすると，800 と x の最大公約数が 2 であるから，$800=2^5\times5^2$ より

$x=2\times$(400 以下の自然数のうち，2 と 5 の倍数でない数)

と表すことができる。

400 以下の自然数のうち 2 と5 の倍数でない数は，一の位の数が 1，3，7，9 であるような数であるから，$400\times\dfrac{4}{10}=160$ 個

（４）$3^{21}-1$ と $3^{18}-1$ の最大公約数を求めればよい。

$$3^{21}-1=3^3(3^{18}-1)+3^3-1$$

より，$(3^{21}-1\,,3^{18}-1)\rightarrow(3^3-1\,,3^{18}-1)$

さらに，

$$3^{18}-1=(3^9)^2-1=(3^9-1)(3^9+1)=\{(3^3)^3-1\}(3^9+1)=(3^3-1)(3^6+3^3-1)(3^9+1)$$

より，$(3^3-1\,,3^{18}-1)\rightarrow(3^3-1\,,3^3-1)$

したがって，求める基本サイズは，$3^3-1=26$

別解

$3^{21}-1$ と $3^{18}-1$ の最大公約数を求めればよい。

$3^{21}-1=3^3(3^{18}-1)+3^3-1$ であるから，$3^{21}-1$ と $3^{18}-1$ の最大公約数は $3^{18}-1$ と 3^3-1 の最大公約数に等しい。

$3^{18}-1=3^3(3^{15}-1)+3^3-1$ であるから，$3^{18}-1$ と 3^3-1 の最大公約数は $3^{15}-1$ と 3^3-1 の最大公約数に等しい。

$3^{15}-1=3^3(3^{12}-1)+3^3-1$ であるから，$3^{15}-1$ と 3^3-1 の最大公約数は $3^{12}-1$ と 3^3-1 の最大公約数に等しい。

以下，同様にして求める最大公約数は 3^3-1 と 3^3-1 の最大公約数であることがわかる。

これは $3^3-1=26$ であり，これが求める基本サイズである。

参考

$3^{21}-1$ を 3 進法で表すと 22222…222（３が21 個並ぶ），3^3-1 を 3 進法で表すと 222 となるので，$3^{21}-1$ は 3^3-1 の倍数。したがって，$3^{21}-1$ と $3^{18}-1$ の最大公約数は $3^3-1=26$

2 ［1995　AIME　８番］（改題）

$\dfrac{x+1}{y+1}$ と $\dfrac{x}{y}$ がともに整数となるような正の整数の組 $(x,\ y)$ の個数を求めよ。

ただし，$y<x\leqq 100$ とする。

解答

$\dfrac{x+1}{y+1}=m$ （ m は 2 以上の整数 ）とおくと

$$x=my+(m-1) \quad \cdots\cdots \quad ①$$

また，$\dfrac{x}{y}$ は整数であるから y は x の約数である。

したがって①より，y は $(m-1)$ の約数でなければならないから

$$m-1=ky \quad \cdots\cdots \quad ②$$

となる正の整数 k が存在する。

②より $m=ky+1$ を①に代入すると

$$x=(ky+1)y+ky=ky(y+1)+y \quad \cdots\cdots \quad ③$$

$x\leqq 100$ より　$ky(y+1)+y\leqq 100$

$$k\leqq\frac{100-y}{y(y+1)}$$

k は正の整数であるから，各 y に対してこの不等式を満たす k の値は $\left[\dfrac{100-y}{y(y+1)}\right]$ 個存在する。

（$[x]$ は x を超えない最大の整数を表す記号）

③により，正の整数 y を 1 つ定めると，k の値と与えられた条件を満たす正の整数の組 $(x,\ y)$ が 1 対 1 に対応するので，求める正の整数の組 $(x,\ y)$ の個数は

$$\sum_{y=1}^{99}\left[\frac{100-y}{y(y+1)}\right]$$

で求めることができる。

$y\geqq 10$ のとき，［　］の中の式の分母の値が分子の値よりも大きくなることに注意すれば,

$$\sum_{y=1}^{99}\left[\frac{100-y}{y(y+1)}\right]=\sum_{y=1}^{9}\left[\frac{100-y}{y(y+1)}\right]$$

$$=\left[\frac{99}{2}\right]+\left[\frac{98}{6}\right]+\left[\frac{97}{12}\right]+\left[\frac{96}{20}\right]+\left[\frac{95}{30}\right]+\left[\frac{94}{42}\right]+\left[\frac{93}{56}\right]+\left[\frac{92}{72}\right]+\left[\frac{91}{90}\right]$$

$$=49+16+8+4+3+2+1+1+1$$

$$=85 \text{　個}$$

別解

$0<y<x$ から，　$y<x \Leftrightarrow xy+y<xy+x \Leftrightarrow y(x+1)<x(y+1) \Leftrightarrow \dfrac{x+1}{y+1}<\dfrac{x}{y}$　である。

$\dfrac{x+1}{y+1}$ と $\dfrac{x}{y}$ がともに整数のとき，それらの差も整数であるから，正の整数 k を用いて

$$k=\frac{x}{y}-\frac{x+1}{y+1}=\frac{x(y+1)-y(x+1)}{y(y+1)}=\frac{x-y}{y(y+1)} \quad \cdots\cdots ①$$

と表せる。さらに，$x \leqq 100$より，　$k \leqq \dfrac{100-y}{y(y+1)}$　$\cdots\cdots$ ②

このとき，正の整数 y の値を１つ定めると，①より $x=ky(y+1)+y$ であるから，問題の条件を満たす k の個数と x の個数は一致する。すなわち，各 y に対する k の個数を数えればよい。

②を満たす正の整数 k の個数は，各 y に対して $\left[\dfrac{100-y}{y(y+1)}\right]$ 個である。

また，$y \geqq 10$ のとき $\dfrac{100-y}{y(y+1)}<1$ より，②を満たす正の整数 k は存在しない。

以上より，求める k の個数は，

$$\begin{aligned}\sum_{y=1}^{9}\left[\frac{100-y}{y(y+1)}\right] &=\left[\frac{99}{2}\right]+\left[\frac{98}{6}\right]+\left[\frac{97}{12}\right]+\left[\frac{96}{20}\right]+\left[\frac{95}{30}\right]+\left[\frac{94}{42}\right]+\left[\frac{93}{56}\right]+\left[\frac{92}{72}\right]+\left[\frac{91}{90}\right] \\ &=49+16+8+4+3+2+1+1+1 \\ &=85 \text{　個}\end{aligned}$$

$\boxed{3}$　合同式

$$1^n+2^n+3^n+4^n\equiv 0 \pmod 5$$

を満たす負でない整数 n の条件を求めよ。

$\boxed{\text{解答}}$　mod 5 で $n=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$ の場合を調べてみると，以下の表のとおりとなる。

n	1^n	2^n	3^n	4^n	$1^n+2^n+3^n+4^n$
0	1	1	1	1	4
1	1	2	3	4	0
2	1	4	4	1	0
3	1	3	2	4	0
4	1	1	1	1	4
5	1	2	3	4	0
6	1	4	4	1	0

この表より、n が 4 で割りきれない数のとき，$1^n+2^n+3^n+4^n\equiv 0 \pmod 5$ が成立することが予想できる。

ここで,

(i)　$1^{n+4}\equiv 1^n \pmod 5$

(ii)　$2^{n+4}\equiv 2^n\times 2^4\equiv 2^n\times 1\equiv 2^n \pmod 5$

(iii)　$3^{n+4}\equiv 3^n\times 3^4\equiv 3^n\times 1\equiv 3^n \pmod 5$

(iv)　$4^{n+4}\equiv 4^n\times 4^4\equiv 4^n\times 1\equiv 4^n \pmod 5$

であるから,

$$1^{n+4}+2^{n+4}+3^{n+4}+4^{n+4}\equiv 1^n+2^n+3^n+4^n \pmod 5$$

すなわち，$1^n+2^n+3^n+4^n \pmod 5$ の値は，n が 4 増えるごとに同じ値を繰り返す。

したがって，$n=0,1,2,3$ の場合について調べればよいが，上の表から $n=0$ のときのみ与えられた条件を満たさないので，求める整数 n の条件 は

「n は 4 で割り切れない自然数」

である。

※本問は，第３回京都数学オリンピック道場の講演に向けた予習用問題です。

$\boxed{4}$ ［2015　京都・大阪数学コンテスト　４番］（改題）

次の問い（１）～（３）に答えなさい。ただし，ここでいう差とは大きい方の数から小さい方の数を引いた値のこととする。

（１）　集合 $\{0, 1, 2, 3, 4, \cdots, 15\}$ の部分集合 S は，どの 2 つの要素をとってもその差が 5　にも 11 にもならない。このような集合 S の要素の個数の最大値は，8 であることを示しなさい。

（２）　集合 $\{0, 1, 2, 3, 4, \cdots, 2015\}$ の部分集合 S は，どの 2 つの要素をとってもその差が 5 にも 11 にもならない。このような集合 S の要素の個数の最大値を求めなさい。

（３）　2 つの正の整数 a，b は，互いに素な奇数であるとする。

k を正の整数として集合 $U=\{0, 1, 2, 3, \cdots, k(a+b)-1\}$ を考え，集合 U の部分集合 S は，どの 2 つの要素をとってもその差が a にも b にもならない。このような集合 S の要素の個数 $n(S)$ の最大値は，$\dfrac{k(a+b)}{2}$ であることを示しなさい。

さらに，これを満たす S は 2 通り存在し，それは集合 U の要素の偶数全体からなる集合と，集合 U の要素の奇数全体からなる集合に限ることを示しなさい。

$\boxed{\text{解答}}$

本問の解答は，第３回京都数学オリンピック道場の講演の中で紹介したので省略します。

なお，（３）は（１）及び（２）の一般化になっています。

例えば，（３）において $a=5$，$b=11$，$k=1$ とすると　$n(S)=\dfrac{1\times(5+11)}{2}=8$　となり，（１）が示されます。

また，（３）において $a=5$，$b=11$，$k=126$ とすると　$n(S)=\dfrac{126\times(5+11)}{2}=1008$　となり，（２）の答えが 1008 であることがわかります。

※この問題は自宅学習用の問題です。道場の最後に解答を渡しますので、自宅で取り組んでください。

5 ［1993　JMO予選　１番］（改題）

n^2 を120 で割ると 1 余るような，120 以下の正の整数 n はいくつあるか。

解答

$n^2 \equiv 1 \pmod{10}$より　$n \equiv 1, 9 \pmod{10}$

よって　候補は次の 24 個である。

1, 9, 11, 19, 21, 29, 31, 39, 41, 49, 51, 59, 61, 69, 71, 79, 81, 89, 91, 99, 101, 109, 111, 119

また　$61 \equiv -59 \pmod{120}$，$69 \equiv -51 \pmod{120}$，…であるから

1, 9, 11, 19, 21, 29, 31, 39, 41, 49, 51, 59 の 12 個を確認すればよい。

ここで　n は 3 の倍数でないので，9, 21, 39, 51 は不適。

ゆえに　1, 11, 19, 29, 31, 41, 49, 59 の 8 個を確認すればよい。

$1^2 = 1 \equiv 1 \pmod{120}$,　$11^2 = 121 \equiv 1 \pmod{120}$,　$19^2 = 361 \equiv 1 \pmod{120}$,

$29^2 = 841 \equiv 1 \pmod{120}$,　$31^2 = 961 \equiv 1 \pmod{120}$,　$41^2 = 1681 \equiv 1 \pmod{120}$,

$49^2 = 2401 \equiv 1 \pmod{120}$,　$59^2 = 3481 \equiv 1 \pmod{120}$

よって　1, 11, 19, 29, 31, 41, 49, 59 の 8 個は条件を満たす。

したがって　求める正整数 n は　$8 \times 2 = 16$ 個

別解

$120 = 3 \cdot 5 \cdot 8$ で，3, 5, 8 は互いに素であるから，$1 \leqq n \leqq 120$ を満たす自然数 n について，n^2 を 3, 5, 8 のいずれで割っても 1 余るような n の個数を求めればよい。

つまり　以下の連立合同式を満たすn（$1 \leqq n \leqq 120$）の個数を求めればよい。

$n \equiv a_1 \pmod{3}$,　$a_1 = 1, 2$

$n \equiv a_2 \pmod{5}$,　$a_2 = 1, 4$

$n \equiv a_3 \pmod{8}$,　$a_3 = 1, 3, 5, 7$

この条件から a_1, a_2, a_3 の選び方は $2 \times 2 \times 4 = 16$ 組

よって　16 組の連立合同式ができる。

中国剰余定理により各 16 組に 1 つずつ解 $n \pmod{120}$ が定まる。

これらはどれも $n^2 \equiv 1 \pmod{120}$ を満たす。

したがって　求める n は16 個

参考　中国剰余定理

m, n を互いに素な 2 以上の整数，a, b を任意の整数とするとき，

$x \equiv a \pmod{m}$

$x \equiv b \pmod{m}$

となる整数 x が存在する。

※この問題は自宅学習用の問題です。道場の最後に解答を渡しますので、自宅で取り組んでください。

$\boxed{6}$　$2x^2+3y^2=z^2$ を満たす自然数 x，y，z の組は存在しないことを示せ。

解答

$2x^2+3y^2=z^2$ を満たす自然数 x，y，z の組が存在すると仮定する。

以下，法を 3 とする。

$z^2\equiv0$，1 である。

$z^2\equiv0$ のとき，$2x^2\equiv0$ であるから $x\equiv0$

$z^2\equiv1$ のとき，$2x^2\equiv1$ となり，不適。

よって　$x\equiv0$，$z\equiv0$

ゆえに，自然数 l，m を用いて

$$x=3l,\ z=3m$$

と表される。

したがって　$2(3l)^2+3y^2=(3m)^2$

整理すると　$6l^2+y^2=3m^2$

よって，自然数 n を用いて

$$y=3n$$

と表される。

ゆえに　$6l^2+(3n)^2=3m^2$

整理すると　$2l^2+3n^2=m^2$

したがって，$l<x$，$n<y$，$m<z$ を満たす自然数の組 l，n，m の組が存在する。

この操作を繰り返すことで，$2x^2+3y^2=z^2$ を満たす自然数 x，y，z の組が無限に存在することになるが，それは不可能である。

よって，$2x^2+3y^2=z^2$ を満たす自然数 x，y，z の組は存在しない。

参考

このような証明の方法を<u>無限降下法</u>といいます。次の問題はこの無限降下法で証明することができるので，各自で考えてみてください。

【問題】　$x^4+y^4=z^4$ を満たす自然数 x，y，z の組は存在しないことを示せ。

（フェルマーの最終定理における $n=4$ の場合）

※この問題は自宅学習用の問題です。道場の最後に解答を渡しますので、自宅で取り組んでください。

7 〔1995　TOT　春JO　問４〕(改題)

十進法で，4000…009（４と９の間に０が１個以上並ぶ）という形の整数は完全平方数ではないことを証明せよ。

解答

途中に０が n 個あるとき，$4000\cdots009=4\times10^{n+1}+9$ と表されることに注意する。

$n=1$ のとき，409 が完全平方数でないことは直接確かめられる。

$n\geqq2$ のとき

$$4\times10^{n+1}+9=t^2 \quad (\,t\text{ は自然数})\cdots\cdots \quad ①$$

のように完全平方数となったとして，矛盾を導く。

①より

$$4\times10^{n+1}=2^{n+3}\times5^{n+1}=(t+3)(t-3)$$

$(t+3)$ と $(t-3)$ の差は６なので，$t+3\equiv t-3\equiv0 \pmod 5$ となることはない。

したがって，$(t+3)$ か $(t-3)$ のいずれか一方が 5^{n+1} で割り切れる。

まず，$t+3$ が 5^{n+1} で割り切れる場合の場合を考える。

このとき，$t+3\geqq5^{n+1}$　でなければならない。

ゆえに　$t-3\leqq2^{n+3}=32\times2^{n-2}$。

$5^{n+1}=125\times5^{n-2}$ より，

$$(t+3)-(t-3)>125\times5^{n-2}-32\times2^{n-2}\geqq125-32>6$$

となり，これは $(t+3)-(t-3)=6$ に矛盾する。

次に，$t-3$ が 5^{n+1} で割り切れる場合の場合を考える。

このとき，$t+3\leqq2^{n+3}=16\times2^{n-1}<25\times5^{n-1}=5^{n+1}\leqq t-3$

となり，矛盾が生じる。

以上から，4000…009（４と９の間に０が１個以上並ぶ）は完全平方数ではない。

※この問題は自宅学習用の問題です。道場の最後に解答を渡しますので、自宅で取り組んでください。

$\boxed{8}$ フィボナッチ（Fibonacci）数列の第 n 項を，F_n と表す。すなわち，数列 $\{F_n\}$ を，

$$F_1=1,\ F_2=1,\ F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$$

とおく。すると，次のような数列となる。

$$F_1=1,\ F_2=1,\ F_3=2,\ F_4=3,\ F_5=5,\ F_6=8,\ F_7=13,\ F_8=21,\ F_9=35,\ \cdots$$

このとき，すべての正の整数 n に対して，次の（１）が成り立つことを証明せよ。

（１）　$4F_nF_{n+1}F_{n+2}F_{n+3}+1$ は，平方数である。

解答

$$a_n=4F_nF_{n+1}F_{n+2}F_{n+3}+1 \quad \cdots\cdots \quad ①$$

とおく。ここで，

$$a_1=4F_1F_2F_3F_4+1=4\cdot1\cdot1\cdot2\cdot3+1=25=(1\cdot3+1\cdot2)^2$$

$$a_2=4F_2F_3F_4F_5+1=4\cdot1\cdot2\cdot3\cdot5+1=121=(1\cdot5+2\cdot3)^2$$

$$a_3=4F_3F_4F_5F_6+1=4\cdot2\cdot3\cdot5\cdot8+1=961=(2\cdot8+3\cdot5)^2$$

$$a_4=4F_4F_5F_6F_7+1=4\cdot3\cdot5\cdot8\cdot13+1=6241=(3\cdot13+5\cdot8)^2$$

$$a_5=4F_5F_6F_7F_8+1=4\cdot5\cdot8\cdot13\cdot21+1=43681=(5\cdot21+8\cdot13)^2$$

より，

$$a_n=(F_nF_{n+3}+F_{n+1}F_{n+2})^2 \quad \cdots\cdots \quad ②$$

と推測される。

①，② より

$$4F_nF_{n+1}F_{n+2}F_{n+3}+1=(F_nF_{n+3}+F_{n+1}F_{n+2})^2$$

$$\Leftrightarrow\ (F_nF_{n+3}-F_{n+1}F_{n+2})^2=1$$

$$\Leftrightarrow\ b_n{}^2=1 \qquad (b_n=F_nF_{n+3}-F_{n+1}F_{n+2}) \quad \cdots\cdots \quad ③$$

であるから，②が成り立つことを示すためには，③が成り立つことを示せばよい。

ここで，

$$\begin{aligned} b_{n+1}&=F_{n+1}F_{n+4}-F_{n+2}F_{n+3}=F_{n+1}(F_{n+2}+F_{n+3})-(F_n+F_{n+1})F_{n+3} \\ &=F_{n+1}F_{n+2}-F_nF_{n+3}=-(F_nF_{n+3}-F_{n+1}F_{n+2}) \\ &=-b_n \end{aligned}$$

$$b_1=F_1F_4-F_2F_3=1\cdot3-1\cdot2=1$$

より，数列 $\{b_n\}$ は，初項１，公比 -1 の等比数列であるから

$$b_n=(-1)^{n-1}$$

よって，$b_n{}^2=1$ となり③が成り立つ。

以上から，題意は成り立つ。