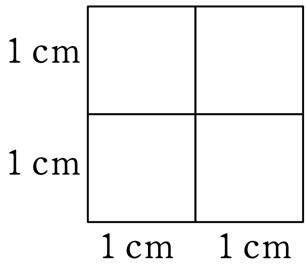
1 〔1995　JMO　予選２番〕

縦，横，斜め，どの方向でも秒速 1 cm で動けるペンを備えた作図装置がある。ペンが紙についていれば動きに従って線が描かれ，ペンが紙から離れていれば何も描かれない。この装置で右の図形を描くのに最短で何秒かかるか。ただし，図に現れる角はすべて直角とし，ペンを紙につけたり離したりする動作には時間はかからないものとする。



解答

なるべくペンを紙から離さないようしながら，一度描いた線分を複数回たどることがないようにペンを動かせば，最短の時間で図形を描くことができる。つまり，与えられた図形を F としたとき，これに縦か横か斜めの線分を書き加えることで「一筆がきができて，その線分の長さの和が最小となる図形 G」をつくることを考えればよい。

図形 F において図 1 の 4 点 A，B，C，D は，いずれもつながっている辺の数が 3 である。

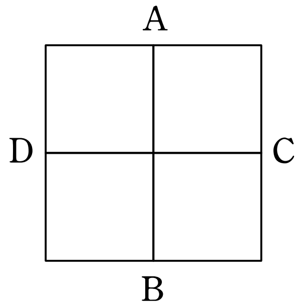


図 1

これら 4 点から 2 点を選び，縦か横か斜めの線分で結ぶと一筆がきができる図形となる。求める図形 G は線分の長さの和が最小の図形であるから，これら 4 点のうち 2 点を結んでできる線分の長さが最小の場合を求めればよい。

ここで点 E を図 2 のようにおくと，図形の対称性から，AC，AB，AE＋EC の 3 通りの長さを比べればよいことがわかる。

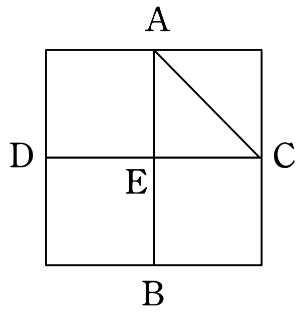


図 2

それぞれの長さを求めてみると

$$\mathrm{AC}=\sqrt{2},\ \mathrm{AB}=2,\ \mathrm{AE}+\mathrm{EC}=1+1=2$$

であるから，A と C を斜めに結んでできる図形が求める G となる。

この図形 G の線分上を一筆がきでペンを動かすと，長さ 1 cm の線分12 本と長さ $\sqrt{2}$ cmの線分 1 本 を 1 回ずつ通過するから，求める時間は $12+\sqrt{2}$ 秒である。

参考（一筆がきができる図形の条件）

頂点につながっている辺の数をその頂点の次数とよぶ。以下の①，②のいずれかの条件を満たす図形は一筆書きができる。

①　すべての頂点の次数が偶数である。

②　次数が奇数の頂点がちょうど 2 つある。

※①の図形は一筆書きを始める頂点と終える頂点が一致します。②の図形は，次数が奇数の頂点のいずれか一方から出発すると一筆書きができ，もう一方の頂点で一筆書きが終わります。

$\boxed{2}$〔「数学教材としてのグラフ理論」鈴木晋一著　より〕(改題)

（１）3 m × 4 m の長方形の土地がある。この土地に木を 13 本植えると，互いの距離が $\sqrt{2}$ m 以下になる 2 本の木が必ず存在することを示せ。

（２）3 m × 4 m の長方形の土地がある。この土地に木を 6 本植えると，互いの距離が $\sqrt{5}$ m 以下になる 2 本の木が必ず存在することを示せ。

解答

（１）図 1 のように，3 m×4 m の長方形の土地を 1 m×1 m の正方形 12 個の区域に分割する。

この 1 つの区域内のどの 2 点も互いの距離が $\sqrt{2}$ m 以下である。

ここで，13 本の木をこれら 12 個の区域に植えると，鳩ノ巣原理より，少なくとも 1 つの区域には 2 本の木を植えなくてはならない。

以上より，互いの距離が $\sqrt{2}$ m 以下になる 2 本の木が必ず存在する。

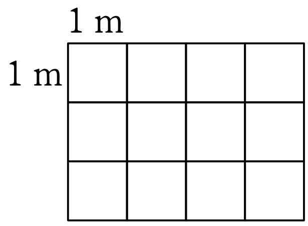


図 1

（２）図 2 のように，3 m×4 m の長方形の土地を 5 個の区域に分割する。

この 1 つの区域内のどの 2 点も互いの距離が $\sqrt{5}$ m 以下である。

ここで，6 本の木をこれら 5 個の区域に植えると，鳩ノ巣原理より，少なくとも 1 つの区域には 2 本の木を植えなければならない。

以上より，互いの距離が $\sqrt{5}$ m 以下になる 2 本の木が必ず存在する。

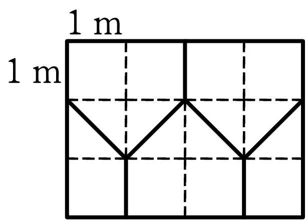


図 2

参考　鳩ノ巣原理（ディリクレ原理，部屋割り論法）

「n 個の巣箱に $n+1$ 羽の鳩を入れると，2 羽以上の鳩が入っている巣箱が少なくとも 1 個はある。」

$\boxed{3}$〔「完全攻略 数学オリンピック」秋山仁，ピーターフランクル著　より〕(改題)

一泊 500 円のホテルがあり，そこに 500 円玉しか持っていない 5 人と 1000 円札しか持っていない 5 人の合計 10 人の客が宿泊する。ホテルでは 1 人ずつ受付をするものとし，受付開始時には，つり銭は準備していないものとする。

このとき，ホテルの受付において，つり銭が不足することがないような料金の受け取り方は全部で何通りあるか。

$\boxed{\text{解答}}$

ホテルの受付が 500 円玉を受け取る回数を x，1000 円札を受け取る回数を y とし，図 1 のような座標平面を考える。この座標平面上の直線 $x=k$（ k は整数）及び直線 $y=l$（ l は整数）を道とよぶ。

このとき，求める料金の受け取り方の総数は，点 (0,　0) から点 (5,　5) まで最短経路で道の上を進む行き方のうち，図 2 の太線で示された道のみを進む行き方の総数に等しい。

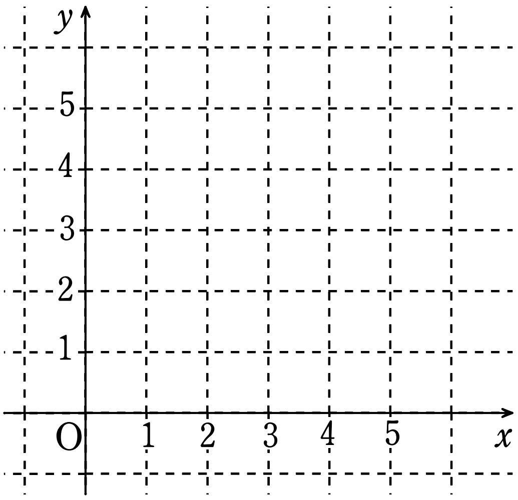


図 1

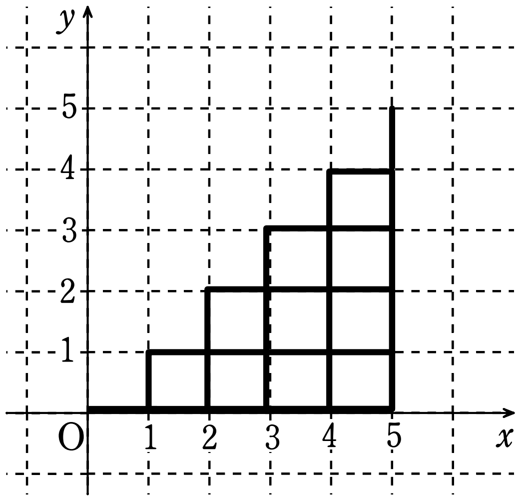


図 2

この道順の総数を図 3 のようにすべて数えあげると 42 通り。

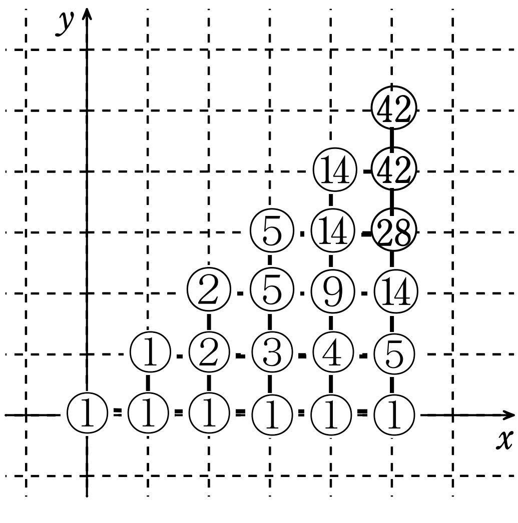


図 3

参考（カタラン数）

a を n 個，b を n 個の計 $2n$ 個を 1 列に並べるとき，a よりも多くの b が先に並ばないような並べ方の総数をカタラン数という。

カタラン数 C_n は次のように表される。（証明は自分で考えてみてください。）

$$C_n = {}_{2n}\mathrm{C}_n - {}_{2n}\mathrm{C}_{n-1} = \frac{{}_{2n}\mathrm{C}_n}{n+1}$$

たとえば，$C_5 = \dfrac{{}_{10}\mathrm{C}_5}{6} = 42$　となる。

本問の場合，500 円玉を受け取ることを a，1000 円札を受け取ることを b と表せば，つり銭が不足することのない料金の受け取り方の総数を求めることと同じになる。

したがって，このことからも解答が $C_5 = 42$ 通りであることがわかる。

ちなみに，カタラン数が現れる有名な問題としては，次のようなものがある。

【問題】　n 組の（ ）を正しい対応で並べる方法の総数を求めよ。

【解答】　$C_n = {}_{2n}\mathrm{C}_n - {}_{2n}\mathrm{C}_{n-1} = \dfrac{{}_{2n}\mathrm{C}_n}{n+1}$ 通り

例えば，$n=5$ のときの正しい対応と誤った対応の例を挙げると，次のようになる。

〔正しい対応の例〕　((((()))))　，　()()()()()　，　((()))(())，(()(()))()

〔誤った対応の例〕　())()(()()　，　)((((())))(

この並べ方の総数が $C_5 = 42$ 通りになることは，カタラン数の定義から明らかであろう。

※平成 21 年度の京都数学コンテストの問題に類題があるのでチャレンジしてみてください。

※この問題は自宅学習用の問題です。道場の最後に解答を渡しますので、自宅で取り組んでください。

$\boxed{4}$〔「完全攻略 数学オリンピック」秋山仁，ピーターフランクル著　より〕(改題)

一泊 500 円のホテルがあり，そこに 500 円玉しか持っていない 5 人と 1000 円札しか持っていない 5 人の合計 10 人の客が宿泊する。ホテルでは 1 人ずつ受付をするものとし，受付開始時には，つり銭用に500円玉を 1 枚のみ準備してあるものとする。

このとき，ホテルの受付において，つり銭が不足することがないような料金の受け取り方は全部で何通りあるか。

解答

ホテルの受付が 500 円玉を受け取る回数を x，1000 円札を受け取る回数を y とし，図 1 のような座標平面を考える。この座標平面上の直線 $x=k$（k は整数）及び直線 $y=l$（l は整数）を道とよぶ。

このとき，求める料金の受け取り方の総数は，点 (0,　0) から点 (5,　5) まで最短経路で道の上を進む行き方のうち，図 2 の太線で示された道のみを進む行き方の総数に等しい。

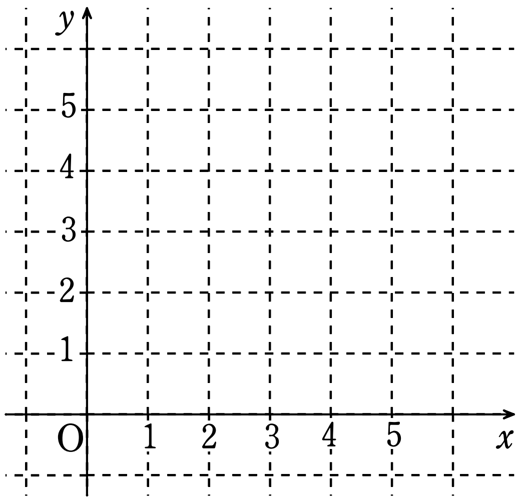


図 1

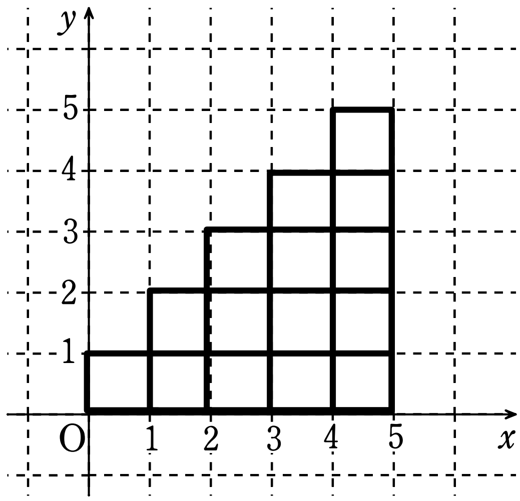


図 2

この道順の総数を図 3 のようにすべて数えあげると 132 通り。

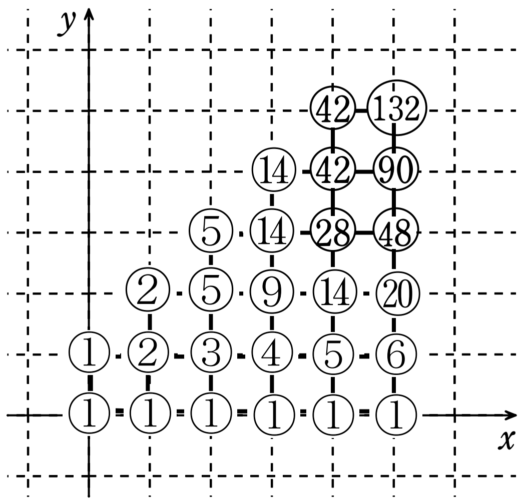


図 3

※この問題は自宅学習用の問題です。道場の最後に解答を渡しますので、自宅で取り組んでください。

$\boxed{5}$〔1994　JMO　予選７番〕

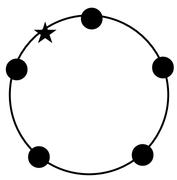
赤い椅子５個と白い椅子５個を円状に並べる並べ方は何通りあるか。ただし，同色の椅子は区別せず，回転して同じ順序になる配置は同じ並べ方とみなす。

解答

まず，５個の赤い椅子（●印）を円状に並べる。それらの間にどのように白い椅子を入れるかによって場合分けをする。

(1)　白い椅子５個をまとめて，１か所に入れる場合
白い椅子５個をどこに入れても回転すると同じ順序になるので，並べ方は，１通り。

(2)　白い椅子５個を２組に分けて，２か所に入れる場合
白い椅子の個数の組合せは，$(1, 4)$, $(2, 3)$ の２通り。
$(1, 4)$ のとき，白い椅子４個を入れる場所を固定（★印）して考えると，
残りの４か所のうち１か所を選び，１個の白い椅子を入れるので４通り。
$(2, 3)$ のときも，白い椅子３個の場所を固定すると，同様に４通り。
よって，この場合の並べ方は，　$4+4=8$ 通り。



(3)　白い椅子５個を３組に分けて，３か所に入れる場合
白い椅子の個数の組合せは，$(1, 1, 3)$, $(1, 2, 2)$ の２通り。
$(1, 1, 3)$ のとき，白い椅子３個を入れる場所を固定（★印）して考えると，
残りの４か所のうち２か所を選び，１個の白い椅子を入れるので ${}_4C_2=6$ 通り。
$(1, 2, 2)$ のときも，白い椅子１個の場所を固定すると，同様に６通り。
よって，この場合の並べ方は，　$6+6=12$ 通り。

(4)　白い椅子５個を４組に分けて，４か所に入れる場合
白い椅子の個数の組合せは，$(1, 1, 1, 2)$ の１通り。
このとき，白い椅子２個を入れる場所を固定（★印）して考えると，
残りの４か所のうち３か所を選び，１個の白い椅子を入れるので，並べ方は，${}_4C_3=4$ 通り。

(5)　白い椅子５個をバラバラに５か所に入れる場合
この場合の並べ方は，１通り。

したがって，(1) ～(5) より並べ方の総数は　$1+8+12+4+1=26$ 通り。

$\boxed{6}$〔1996　都市対抗オリンピック春JA　問５〕(改題)

8 人の生徒が同じ 8 題の問題を考えた。

(a)　どの問題もちょうど 5 人の生徒が正解したとき，次の**〈条件〉**を満たす 2 人の生徒を必ず選ぶことができることを証明せよ。

〈条件〉「すべての問題について，2 人のうち少なくとも 1 人は正解している。」

(b)　どの問題もちょうど 4 人の生徒が正解したとする。このとき，(a)の**〈条件〉**を満たす 2 人の生徒を選ぶことができない場合があることを示せ。

解答

(a)　**〈条件〉**を満たす 2 人の生徒を選ぶことができないと仮定する。

すなわち，どの 2 人の生徒を選んでも，2 人とも不正解であった問題が少なくとも 1 題は存在すると仮定する。

2 人の生徒（ペア）の選び方は全部で ${}_8C_2=28$ 通りあるので，そのような問題が少なくとも 28 題存在することになる。問題は 8 題であるので，少なくとも 4 組のペアが正解できなかった問題が必ず 1 題は存在する。

4 組のペアは 3 人では作ることができないので，この問題を正解できなかった生徒は少なくとも 4 人はいる。そうすると，この問題を正解した生徒が 4 人以下となり矛盾。

したがって，題意は成り立つ。

(b)　8 人の生徒（生徒 1 ～ 8 ）が 8 題の問題（①～⑧）について，下の表のように正解（○が正解）したとする。

このとき，どの問題もちょうど 4 人の生徒が正解しているが，どの 2 人の生徒も合わせて 7 題以下の問題しか正解していない。

したがって，題意は示された。

問 題	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧
生徒 1	○	○	○	○				
生徒 2	○	○			○	○		
生徒 3			○	○	○	○		
生徒 4	○		○				○	○
生徒 5		○		○			○	○
生徒 6		○			○	○	○	
生徒 7	○			○	○			○
生徒 8			○			○	○	○

(a)の$\boxed{\text{別解}}$

どの問題も，ちょうど 3 人の生徒が正解できなかったので，1 つの問題を正解できなかった 2 人の生徒の選び方は，3 通りずつある。

問題は全部で 8 問あるから，2 人の生徒を，〈条件〉を満たさない，すなわち，

「 ある問題について，2 人とも不正解である。」

ように選ぶ方法は，最大で 24 通り考えることができる。

ところが，8 人の生徒から 2 人の生徒を選ぶ方法は，全部で ${}_8C_2=28$ 通りある。

ゆえに，〈条件〉を満たす 2 人の生徒は，少なくとも 4 通り選ぶことができる。

※この問題は自宅学習用の問題です。道場の最後に解答を渡しますので、自宅で取り組んでください。

7 ［第４回ジュニア算数オリンピック･ファイナル問題　より］（改題）

5 桁の整数があります。6 桁の整数のうち 1 つの数を消したら，この 5 桁の整数になるような 6 桁の整数はいくつありますか。

解答

最初の 5 桁の整数の万の位の数を a_1，千の位の数を a_2，百の位の数を a_3，十の位の数を a_4，一の位の数を a_5 とおく。これら a_1～ a_5 の数字の両端または間を，次のように (1) ～ (6) で表す。

(1) a_1 (2) a_2 (3) a_3 (4) a_4 (5) a_5 (6)

条件を満たすような 6 桁の整数は，(1) に 1 から 9 までの数字のうち 1 つを入れるか，(2) ～ (6) のいずれかに 0 から 9 までの数字のうち 1 つを入れるかすることで作ることができる。したがって，全部で 9+10×5=59 通りの作り方があることになるが，異なる作り方で同じ整数ができる場合があるので，その重複分を除かなければならない。それを「 $a_1\,a_2\,a_3\,a_4\,a_5$ 」の数字の並びに同じ数字の並びがどのようにあるかによって，以下のとおり場合分けをして考える。

(ア)　同じ数字が続いている箇所がない場合

たとえば a_1 について，「 a_1 と同じ数字を (1) に入れる」場合と「 a_1 と同じ数字を (2) に入れる」場合は同じ整数ができるので重複している。a_2～ a_5 の場合も同様に考えると，重複しているのは全部で 5 通り。したがって，6 桁の整数は 59−5=54 個できる。

(イ)　同じ数字がちょうど 2 個続いて並ぶ箇所が 1 か所だけある場合

たとえば $a_1=a_2$ の場合を考えると，「 a_1 と同じ数字を (1) に入れる」「 a_1 と同じ数字を (2) に入れる」「 a_1 と同じ数字を (3) に入れる」が重複している。

また，a_3，a_4，a_5 については (ア) と同様に考えれば重複は 3 通り。

したがって，$a_1=a_2$ の場合は重複は 5 通り。$a_2=a_3$，$a_3=a_4$，$a_4=a_5$ の場合も同様。

ゆえに，6 桁の整数は 59−5=54 個できる。

(ウ)　同じ数字がちょうど 3 個続いて並ぶ箇所が 1 か所だけある場合

たとえば $a_1=a_2=a_3$ の場合を考えると，「 a_1 と同じ数字を (1) に入れる」「 a_1 と同じ数字を (2) に入れる」「 a_1 と同じ数字を (3) に入れる」「 a_1 と同じ数字を (4) に入れる」が重複している。

また，a_4，a_5 については (ア) と同様に考えれば重複は 2 通り。

したがって，$a_1=a_2=a_3$ の場合は重複は 5 通り。$a_2=a_3=a_4$，$a_3=a_4=a_5$ の場合も同様。

ゆえに，6 桁の整数は 59−5=54 個できる。

(エ)　同じ数字がちょうど 4 個続いて並ぶ箇所が 1 か所だけある場合

たとえば $a_1=a_2=a_3=a_4$ の場合を考えると，「 a_1 と同じ数字を (1) に入れる」「 a_1 と同じ数字を (2) に入れる」「 a_1 と同じ数字を (3) に入れる」「 a_1 と同じ数字を (4) に入れる」「 a_1 と同じ数字を (5) に入れる」が重複している。

また，a_5 については (ア) と同様に考えれば重複は 1 通り。

したがって，$a_1=a_2=a_3=a_4$ の場合は重複は 5 通り。$a_2=a_3=a_4=a_5$ の場合も同様。

ゆえに，6 桁の整数は 59−5=54 個できる。

(オ)　同じ数字が 5 個続いて並ぶ場合

$a_1=a_2=a_3=a_4=a_5$ の場合であるから，「 a_1 と同じ数字を (1) に入れる」「 a_1 と同じ数字を (2) に入れる」「 a_1 と同じ数字を (3) に入れる」「 a_1 と同じ数字を (4) に入れる」「 a_1 と同じ数字を (5) に入れる」「 a_1 と同じ数字を (6) に入れる」が重複している。

したがって，重複は 5 通りとなるので，6 桁の整数は 59−5=54 個できる。

(カ)　同じ数字がちょうど 2 個続いて並ぶ箇所が 2 か所ある場合

$a_1=a_2$ かつ $a_4=a_5$ の場合であるから，「 a_1 と同じ数字を (1) に入れる」「 a_1 と同じ数字を (2) に入れる」「 a_1 と同じ数字を (3) に入れる」が重複しており，「 a_4 と同じ数字を (4) に入れる」「 a_4 と同じ数字を (5) に入れる」「 a_4 と同じ数字を (6) に入れる」が重複している。

また，a_3 については (ア) と同様に考えて重複は 1 通り。

したがって，重複は 5 通りとなるので，6 桁の整数は 59−5=54 個できる。

(キ)　同じ数字がちょうど 2 個続いて並ぶ箇所が 1 か所あり，その数字とは異なる数字がちょうど 3 個続いて並ぶ 箇所が 1 か所ある場合

$a_1=a_2=a_3$ かつ $a_4=a_5$ の場合を考えると，「 a_1 と同じ数字を (1) に入れる」「 a_1 と同じ数字を (2) に入れる」「 a_1 と同じ数字を (3) に入れる」「 a_1 と同じ数字を (4) に入れる」が重複しており，「 a_4 と同じ数字を (4) に入れる」「 a_4 と同じ数字を (5) に入れる」「 a_4 と同じ数字を (6) に入れる」が重複している。

したがって，この場合の重複は 5 通り。$a_1=a_2$ かつ $a_3=a_4=a_5$ の場合も同様。

ゆえに，6 桁の整数は 59−5=54 個できる。

以上 (ア) ～ (キ) より，いずれの場合も 6 桁の整数は 54 個できる。

解答

最初の 5 桁の整数の万の位の数を a_1，千の位の数を a_2，百の位の数を a_3，十の位の数を a_4，一の位の数を a_5 とおく。これら a_1～ a_5 の数字の両端または間を，次のように (1) ～ (6) で表す。

(1) a_1 (2) a_2 (3) a_3 (4) a_4 (5) a_5 (6)

条件を満たすような 6 桁の整数は，(1) に 1 から 9 までの数字のうち 1 つを入れるか，(2) ～ (6) のいずれかに 0 から 9 までの数字のうち 1 つを入れるかすることで作ることができる。

ただし，この作り方で 6 桁の整数を作ると，異なる入れ方であっても同じ整数が作られる場合がある。それを防ぐために，次のルールを考える。

【ルールＸ】　(2) ～ (6) には，その左隣にある数字と同じ数字を入れてはいけない。

(1)～(6)に，このルールXにしたがって数字を入れる入れ方の総数が，求める6桁の整数の個数に等しいことを後で示す。

まず，ルールXにしたがって数字を入れる入れ方の総数を求める。

(1)に入れる数字は1から9までの9通り。

(2)～(6)に入れる数字は，いずれについても0から9までの数字のうち左隣の数字を除いた9通り。

したがって，求める総数は $9+9\times 5=54$ 通り　………①

次に，ルールXにしたがって数字を入れる入れ方の総数が，求める6桁の整数の個数に等しいことを示す。そのためには，次の(ア)，(イ)がともに成り立つことを示せばよい。

> (ア)　ルールXにしたがった2つの異なる入れ方で作られた2つの6桁の整数は必ず異なる。
> (イ)　ルールXにしたがわずに数字を入れてできる6桁の整数は，ルールXにしたがって数字を入れても作ることができる。

まず(ア)を背理法で示す。

ルールXにしたがった2つの異なる入れ方で，同じ6桁の整数を作ることができると仮定する。

2つの異なる入れ方を「(m)に数字 b を入れる」と「(n)に数字 c を入れる」と表す。（m，n は1から6までの整数，b，c は0から9までの整数)

同じ6桁の整数ができるので $b=c$ であるが，数字の入れ方は異なるので $m\neq n$。m と n の大小関係を決めても一般性は失われないので $m<n$ とする。

このとき，最初の5桁の整数「$a_1\,a_2\,a_3\,a_4\,a_5$」について

「(m)に数字 b を入れる」ことでできる6桁の整数は，左から n 番目の数字が a_{n-1}

「(n)に数字 c を入れる」ことでできる6桁の整数は，左から n 番目の数字が c

したがって，$a_{n-1}=c$ とならなければならないが，これはルールXに反することになるので矛盾。

ゆえに，(ア)は成り立つ。

次に(イ)を示す。

まず，最初の5桁の整数「$a_1\,a_2\,a_3\,a_4\,a_5$」について，a_i と同じ数字が a_s から a_t まで並んでいるとする（i，s，t は1以上5以下の整数で，$s\leqq i\leqq t$）。

ルールXにしたがわない数字の入れ方とは，$(i+1)$に a_i と同じ数字を入れる入れ方のことであり，このときできる6桁の整数は，左から数えて s 番目から $t+1$ 番目まで同じ数字 a_i が並ぶことになる。

ところがこの6桁の整数は(s)に a_i と同じ数字を入れる入れ方でも作ることができ，この作り方はルールXにしたがっている。

ゆえに，(イ)は成り立つ。

以上から，ルールXにしたがって数字を入れる入れ方の総数が，求める6桁の整数の個数に等しいことが示された。

したがって，①から54通り。