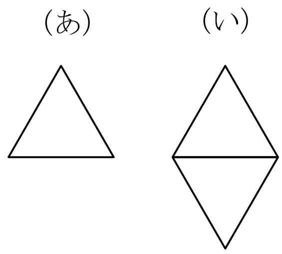
1 〔2004　広中杯〕(改題)

1 辺の長さが 30 である正三角形 ABC がある。

この正三角形 ABC を，1 辺の長さが 1 の正三角形のタイル（あ）と，（あ）を図のように 2 枚くっつけたタイル（い）の 2 種類のタイルで覆いたい。ただし，タイルは重ねずに用いることとする。

このとき，（あ）のタイルは少なくとも何枚必要か。簡単な理由をつけて答えよ。



解答

△ABC の各辺を 30 等分する点を結んでできる，1 辺の長さが 1 の正三角形 900 個について考える。図 1 のように，それらの正三角形を，隣り合う正三角形が異なる色となるように白色と黒色で塗り分ける。

このとき，黒色の正三角形は，白色の正三角形より 30 個多くなる。

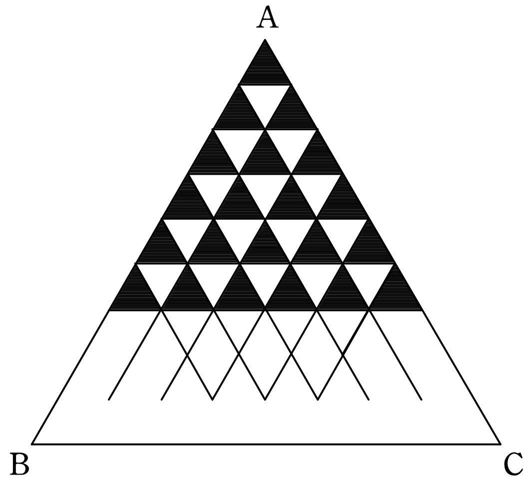


図 1

（い）のタイルを用いるときは，必ず黒色と白色の正三角形を 1 個ずつ覆うことになるため，なるべく多くの（い）のタイルを用いるとき，残った黒色の正三角形を覆うためには（あ）のタイルが少なくとも 30 枚必要である。

実際，図 2 のように並べれば，（あ）のタイルを 30 枚だけ用いて △ABC を覆うことができる。

ゆえに，（あ）のタイルは少なくとも 30 枚必要である。

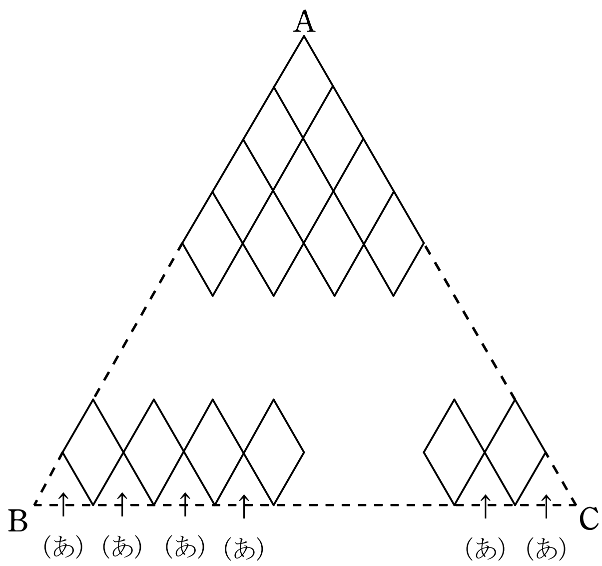
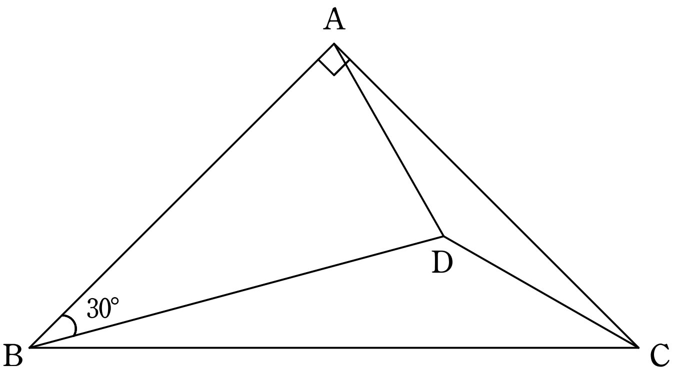


図 2

2 〔ブルーバックス「パズルでひらめく補助線の幾何学」中村義作著　より〕(改題)

図の直角二等辺三角形 ABC において，点 D は ∠ABD が 30° で，BA＝BD となるようにとった点である。このとき，AD＝CD となることを示しなさい。



解答

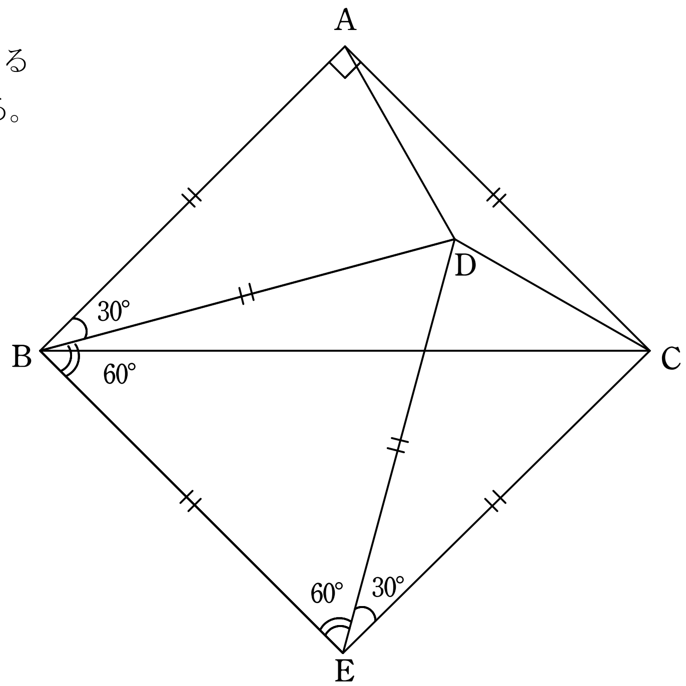
右の図のように，四角形 ABEC が正方形となるように点 E をとると，△BED は正三角形である。

よって，AB＝BD＝DE＝EC，

また，∠ABD＝∠DEC＝30° より，

△ABD≡△DEC

ゆえに，AD＝CD が成り立つ。



別解

点 D から辺 AB に垂線 DH を引き，辺 AC の中点を E とする。

△BDH は ∠HBD＝30°，∠DHB＝90° の直角三角形であるから，$\mathrm{DH}=\dfrac{1}{2}\mathrm{BD}$ となる。

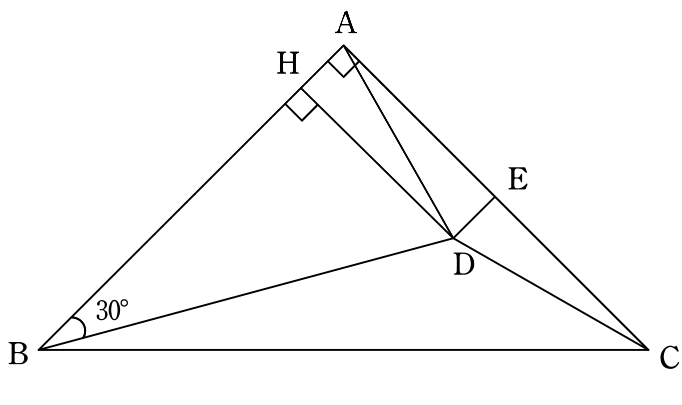
BA＝BD＝AC より，

$\mathrm{DH}=\dfrac{1}{2}\mathrm{BD}=\dfrac{1}{2}\mathrm{AC}=\mathrm{AE}$

さらに，DH，AE はともに辺 AB に垂直であるから，四角形 AEDH は長方形となり

DE∥HA

以上より，直線 DE は辺 AC の垂直二等分線であるから，AD＝CD



別解

辺 AC を 1 辺とする正三角形 EAC を △ABC の外側につくり，頂点 E と点 D を結ぶ。

△BAD は二等辺三角形であるから，∠BAD＝75° であることがわかる。

$$\mathrm{BA}=\mathrm{AC}=\mathrm{EA}$$

$$\angle\mathrm{EAD}=\angle\mathrm{EAC}+\angle\mathrm{BAC}-\angle\mathrm{BAD}=60^\circ+90^\circ-75^\circ=75^\circ$$

であるから，三角形の 2 辺とその間の角がそれぞれ等しくなり

$$\triangle\mathrm{BAD}\equiv\triangle\mathrm{EAD}$$

したがって，

$$\angle\mathrm{AED}=\angle\mathrm{ABD}=30^\circ$$

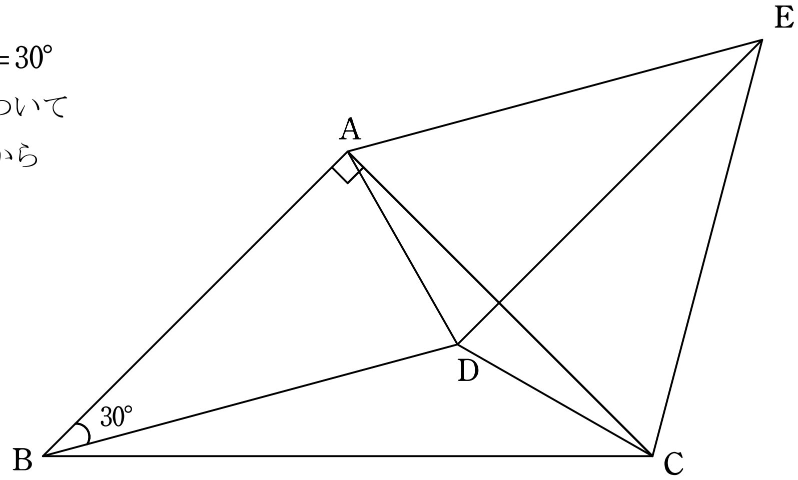
$$\angle\mathrm{CED}=\angle\mathrm{AEC}-\angle\mathrm{AED}=30^\circ$$

以上から，△EAD と △ECD について

2 辺とその間の角がそれぞれ等しいから

$$\triangle\mathrm{EAD}\equiv\triangle\mathrm{ECD}$$

ゆえに，AD＝CD



別解

座標平面上に 4 点

A（1，0），B（0，0），C（1，1）

D$\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$ をとると，

△ABC は直角二等辺三角形

∠CAB＝90°，∠ABD＝30°

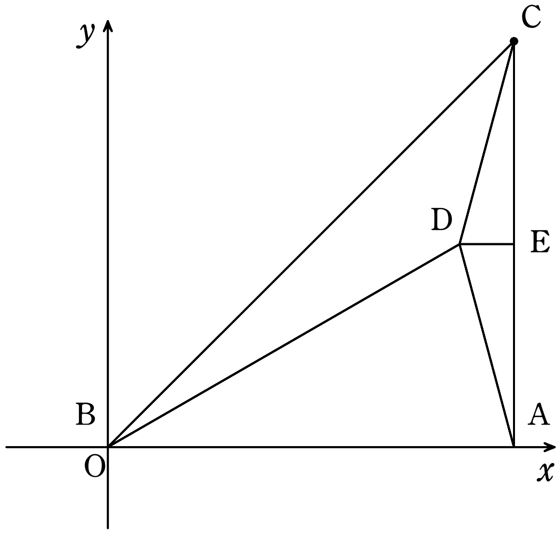
BA＝BD

となるので，与えられた条件を満たす図形ができる。この図形において AD＝CD が成り立つことを示せばよい。

E$\left(1,\ \dfrac{1}{2}\right)$ とおくと，△ADE と △CDE について

∠AED＝∠CED，AE＝CE，DE は共通であるから，2 辺とその間の角がそれぞれ等しいので　△ADE≡△CDE

したがって，AD＝CD

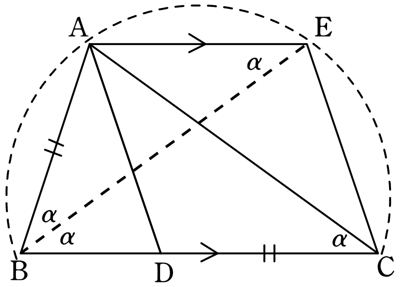


$\boxed{3}$〔2001 JMO 予選９番〕

$\angle ABC = 2\angle ACB$ となる三角形 ABC において，$\angle BAC$ の二等分線と辺 BC との交点を D とする。$AB = CD$ のとき $\angle BAC$ は何度(°)か。ただし，線分 XY の長さを XY で表す。

$\boxed{解答}$

$\angle ACB = \alpha$ とし，三角形 ABC の外接円と $\angle ABC$ の二等分線との交点をE とおく。



円周角の定理から $\angle AEB = \angle ACB = \alpha$

よって，$AE = AB$

また，$\angle AEB = \angle EBC = \alpha$ より $AE /\!/ BC$

$AE = AB = DC$ であるから，四角形 ADCE は平行四辺形である。

よって，$AD = EC$

$\angle EBC = \angle ACB$ であるから，円周角の定理の逆より $EC = AB$

以上より $AD = AB$

よって，$\angle ADB = 2\alpha$

また，$AD = DC$ より $\angle CAD = \alpha$

よって，$\angle BAC = 2\alpha$

したがって，$\triangle ABC$ の内角の和は 180° であるから

$$2\alpha + 2\alpha + \alpha = 180^\circ$$
$$\alpha = 36^\circ$$

よって，$\angle BAC = 2\alpha = 72^\circ$

４ ［2007 APMO ２番］（改題）

Let ABC be an acute angled triangle with $\angle BAC = 60°$ and $AB > AC$. Let I be the incenter, and H the orthocenter of the triangle ABC.

Prove that $2\angle AHI = 3\angle ABC$.

（訳）

∠BAC＝60°，AB＞AC である鋭角三角形 ABC があり，△ABC の内心を I，垂心を H とする。このとき，2∠AHI＝3∠ABC が成り立つことを示せ。

解答

AC＝1 として考えてもよい。△ABC は鋭角三角形で ∠BAC＝60° であることから，△ABC は図１のような三角形で，頂点 B は 1＜AB＜2 を満たす範囲にある。

よって，図２のように，頂点 C から辺 AB に垂線 CD を下ろすと，垂心 H は CD 上にあり，1＜AB から常に ∠HAC＜30° である。

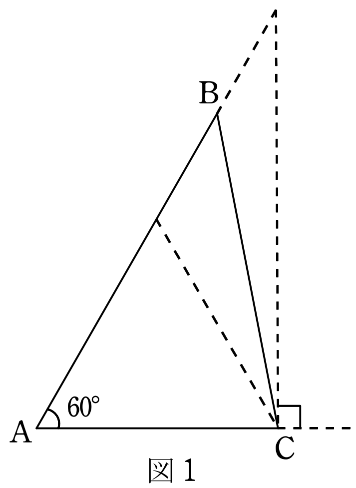


図１

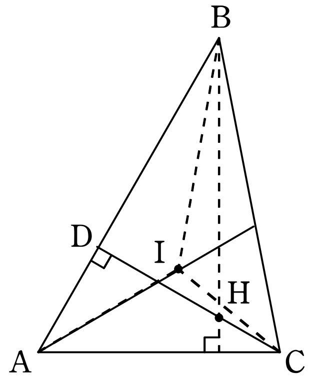


図２

ここで，∠ABI＝α，∠ACI＝β とする。

点 I は △ABC の内心であるから図３より，

$\angle ABC = 2\alpha$，$\angle ACB = 2\beta$，

$\alpha + \beta = 60°$，$\angle BIC = 120°$

が成り立つ。また，図４より，

$\angle HAC = 90° - 2\beta$

$\angle HCA = \angle DCA = 90° - 60° = 30°$

$\angle AHD = \angle HAC + \angle HCA$

$= 120° - 2\beta = 2\alpha$

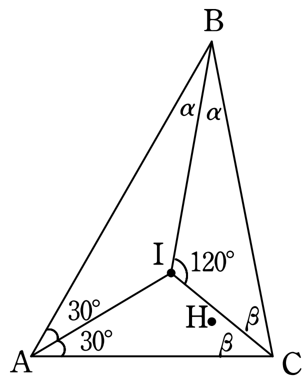


図３

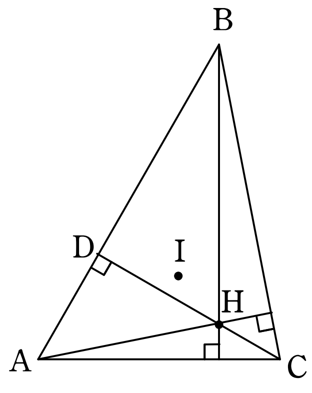


図４

さらに，∠BHC＝∠HCA＋90°＝120° であるから，円周角の定理の逆により，４点 B，I，H，C は図５のように同一円周上にある。

ゆえに，$\angle IHD = \angle IBC = \alpha$

よって，$\angle AHI = \angle AHD + \angle IHD = 2\alpha + \alpha = 3\alpha$

以上より，

$2\angle AHI = 2 \times 3\alpha = 6\alpha$

$3\angle ABC = 3 \times 2\alpha = 6\alpha$

したがって，

$2\angle AHI = 3\angle ABC$

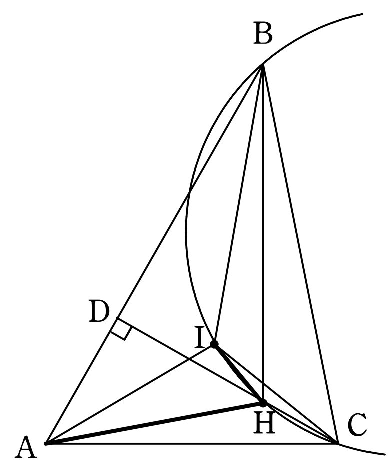


図５

※この問題は自宅学習用の問題です。道場の最後に解答を渡しますので、自宅で取り組んでください。

5 〔2002 JMO 予選８番〕

三角形 ABC があり，$\angle$BAC の二等分線と辺 BC との交点を D とする。

$\angle BAC : \angle BCA = 2 : 3$ であり，さらに $AB+CD=AC$ である。

このとき $\angle$BAC は何度か。ただし，2 点 X，Y に対し，線分 XY の長さを XY で表している。

解答

$\angle BAC=2x$，$\angle BCA=3x$ とおく。

直線 AD に関して点 B と対称な点を E とすると，$\triangle ABD \equiv \triangle AED$

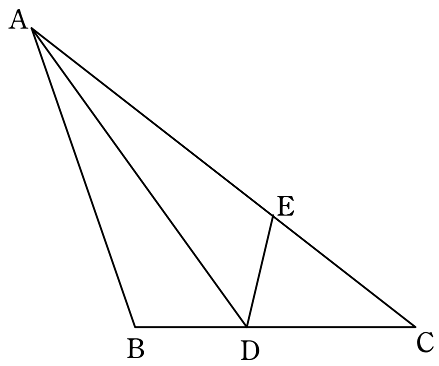
よって，$\angle ADB=\angle ADE$

また，$AB=AE$ なので $AB+CD=AC=AE+CE$ より $CD=CE$

よって，$\triangle CDE$ は二等辺三角形であるから，$\angle CED=\angle CDE$

ゆえに，$\angle AED=180^\circ-\dfrac{180^\circ-3x}{2}=\dfrac{180^\circ+3x}{2}$

また，$\angle AED=\angle EDB$ より $\angle ADE=\dfrac{1}{2}\angle EDB=\dfrac{1}{2}\angle AED$



よって，$\triangle ADE$ に着目すると

$$\begin{aligned}180^\circ &= \angle DAE+\angle AED+\angle ADE\\ &=\frac{1}{2}\angle BAC+\frac{3}{2}\angle AED\\ &=\frac{1}{2}\cdot 2x+\frac{3}{2}\cdot\frac{180^\circ+3x}{2}\end{aligned}$$

ゆえに，$x=\dfrac{180^\circ}{13}$

したがって，$\angle BAC=2x=\dfrac{360^\circ}{13}$

6 〔2003　広中杯〕（改題）

四角形 ABCD が

- $AB=4$，$BC=6$，$CD=5$，$DA=3$
- 対角線 AC，BD の中点をそれぞれ M，N とするとき，$MN=\dfrac{3}{2}$

の両方の条件を満たすとき，この四角形 ABCD の面積を求めよ。

解答

図１のように辺 AB の中点を L とおくと，

△ABD で中点連結定理より，$LN=\dfrac{1}{2}AD=\dfrac{3}{2}$

△ABC で中点連結定理より，$LM=\dfrac{1}{2}BC=3$

条件より，$MN=\dfrac{3}{2}$ であるから，

3 点 L，M，N は一直線上にある。

よって，LN と LM は同じ直線であるから，AD∥BC が成り立つ。

すなわち，四角形 ABCD は台形である。

次に，図２のように頂点 D を通り，辺 AB に平行な直線を引き，辺 BC との交点を E とすると，

AD∥BE かつ AB∥DE より，四角形 ABED は平行四辺形である。

よって，$BE=3$，$EC=3$，$DE=4$ が成り立つ。

このとき，△DEC の辺の比が $3:4:5$ であるので，△DEC は $\angle DAC=90^\circ$ の直角三角形である。

以上より，四角形 ABCD は長方形と直角三角形を組み合わせた図３のような形をしていることがわかる。

ゆえに，面積は，

$$\frac{1}{2}\times(3+6)\times4=18$$

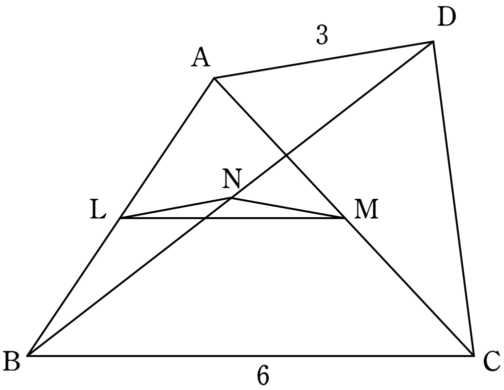


図１

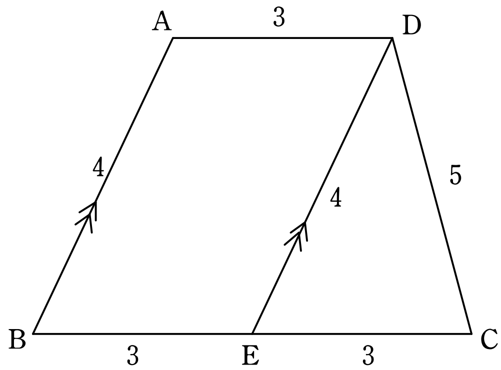


図２

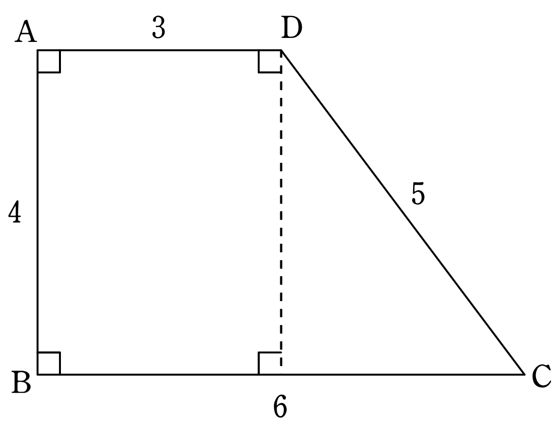
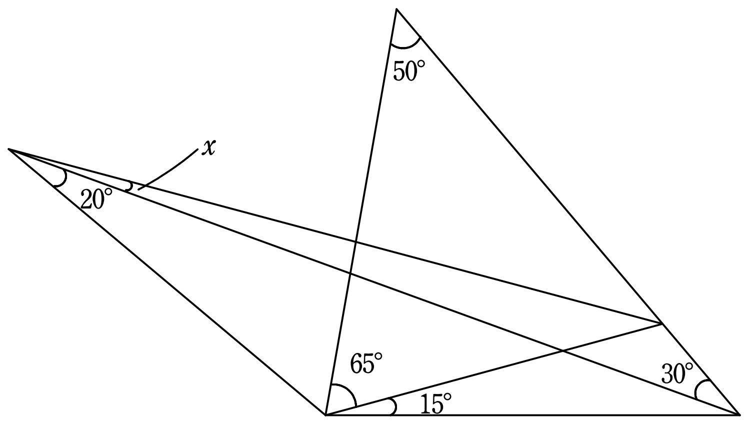


図３

※この問題は自宅学習用の問題です。道場の最後に解答を渡しますので、自宅で取り組んでください。

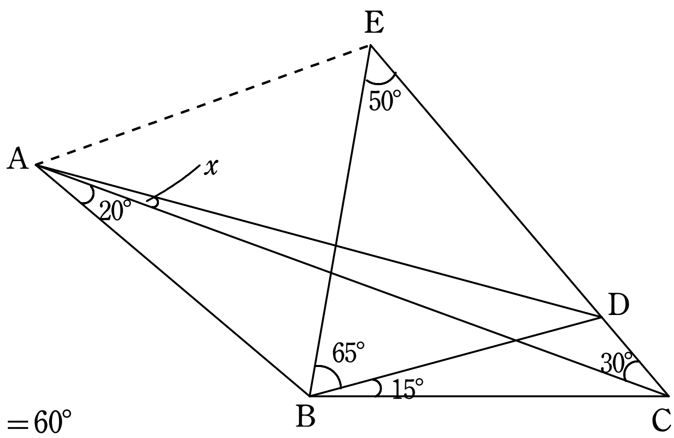
7 〔2007　ジュニア算数オリンピック　トライアル〕(改題)

右の図において，角 x を求めなさい。



解答

右の図のように各頂点に A ～ E の名前をつける。



$\angle$BDE$=180°-(50°+65°)=65°$

であるから，EB$=$ED が成り立つ。

また，$\angle$BCE$=180°-(15°+65°+50°)=50°$

であるから，BC$=$BE が成り立ち，

$\angle$ACE$=50°-30°=20°$ であるから，

BA$=$BC が成り立つ。

さらに，$\angle$ABE$=180°-(20°+20°+65°+15°)=60°$

であるから，△ABE は正三角形である。

以上より，

EA$=$ED，$\angle$AED$=60°+50°=110°$

を利用して，

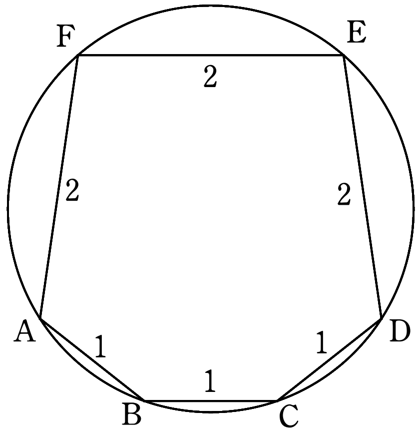
$\angle$EAD$=(180°-110°)\div 2=35°$

よって，

$x=60°-(20°+35°)=5°$

8　〔「数学ワンダーランド（高校への数学）」小島寛之著　より〕(改題)

右図のような円に内接する六角形 ABCDEF の面積を求めなさい。



解答

円の中心を O とし，点 O と六角形の各頂点を結ぶと，2 種類の二等辺三角形が 3 つずつできる。

図 1 のように

$\angle AOB = \angle BOC = \angle COD = a$

$\angle AOF = \angle FOE = \angle EOD = b$

とおくと，$3a + 3b = 360°$

より，$a + b = 120°$ がわかる。

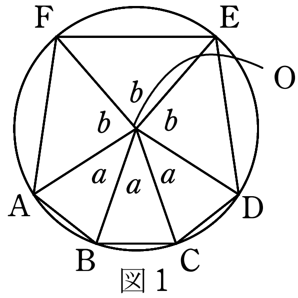


図 1

図 2 のように BE と CF を結び，交点を P とおく。

$\angle FOB = a + b = 120°$（中心角）なので，

$\angle FEB = \angle FCB = 60°$（円周角）がわかる。

同様にして，$\angle EFC = \angle EBC = 60°$ もわかるので，

$\triangle PBC$ と $\triangle PEF$ は，ともに正三角形である。

よって，$PB = PC = 1$，$PE = PF = 2$ である。

さらに，図 3 のように BF と CE を結ぶと，

$\triangle ABF \equiv \triangle PBF \equiv \triangle PCE \equiv \triangle DCE$（3 辺相等から）

以上より，六角形 ABCDEF の面積を S とすると

$S = \triangle PBC + \triangle PEF + 4 \times \triangle PBF$

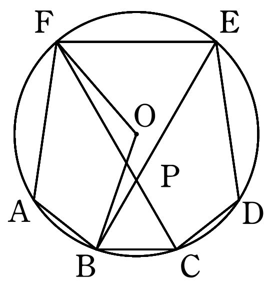


図 2

ここで

$\triangle PBC = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$，　$\triangle PEF = \sqrt{3}$

また，$\triangle PBF$ は，図 4（次ページ）のように考えると，

$\triangle PBF = \dfrac{1}{2} \times 2 \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

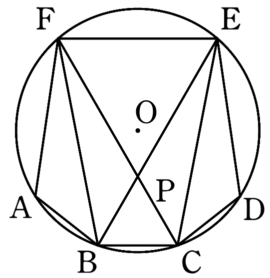


図 3

ゆえに,

$$S=\frac{\sqrt{3}}{4}+\sqrt{3}+4\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{13\sqrt{3}}{4}$$

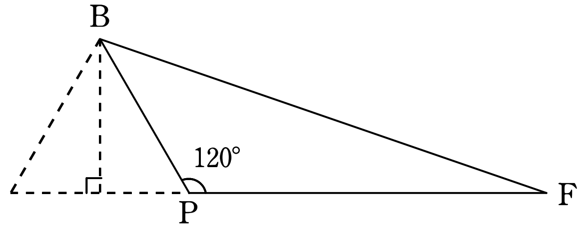


図４

別解

右図のように各頂点と円の中心を結び２種類６個の二等辺三角形１～６に分割し（図１），
対称性を持つように組み替え，新しい六角形 A′B′C′D′E′F′ を作る。(図２)

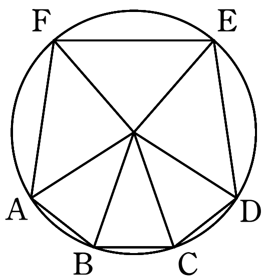


図１

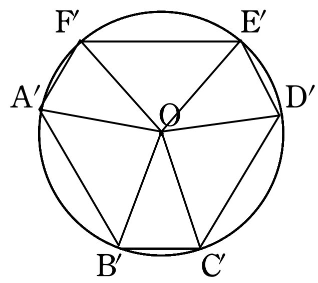


図２

このとき，六角形 A′B′C′D′E′F′ の６つの角はすべて $a+b=120°$ であるから，
３つの辺 B′C′，D′E′，F′A′ を延長した線との交点をそれぞれ P，Q，R とすると，
△PQR は正三角形である。（図３）

よって求める面積は，１辺の長さが５の正三角形から１辺の長さが２の正三角形３つを引くことで求めることができる。

ゆえに求める面積は

$$\triangle PQR=5\times\frac{5\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{2}-2\times\sqrt{3}\times\frac{1}{2}\times3$$
$$=\frac{13}{4}\sqrt{3}$$

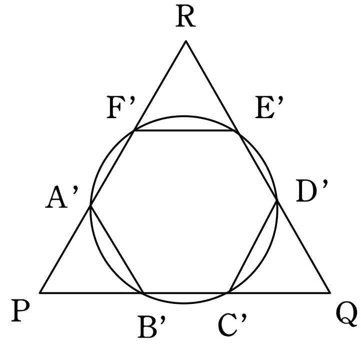


図３