京都・大阪数学コンテスト2015　略解

1　（1）a を1桁の正の整数とし，b を1桁の正の整数または0とする。

$n^2=1000a+100a+10b+b$ とおくと，$n^2=11(100a+b)$ であり，n^2 は11の倍数，すなわち n は11の倍数。

n は2桁の整数であるから，$n=11,\ 22,\ 33,\ \cdots,\ 99$

実際に計算すると，

$11^2=121,\ 22^2=484,\ 33^2=1089,\ 44^2=1936,\ 55^2=3025,$

$66^2=4365,\ 77^2=5929,\ 88^2=7744,\ 99^2=9801$

ゆえに，条件を満たすものは　$n=88$　………　答

別解

$n=10a+b,\ n^2=1000c+100c+10d+d=1100c+11d$ とする。

ただし，$a,\ c$ は1桁の正の整数，$b,\ d$ は1桁の正の整数または0とする。

$n^2=11(100c+d)$　…①　より，n は11の倍数である。

よって，$a=b$ が成り立ち，$n=11a$ と表せる。

$n=11a$ を①に代入すると，

$$(11a)^2=11(100c+d) \quad \cdots②$$

$$11a^2=100c+d$$

$$11a^2=99c+c+d$$

$$11(a^2-9c)=c+d$$

したがって $c+d$ は11の倍数であるが $0<c+d\leqq 18$ より $c+d=11$

よって，$a^2-9c=1$

$a^2=9c+1$ を満たす自然数 $(a,\ c)$ の組は，$(a,\ c)=(8,\ 7)$。このとき，$d=4$

これらを②に代入すると，$88^2=7744$ となり，題意を満たす。

よって，$n=88$　………　答

（2）頂点Dが移った点を D′，D′A′ と DC の交点を R とする。

折り返しの条件より，$\angle \mathrm{A'PB}=\angle \mathrm{A'PB'}=\angle \mathrm{APB'}$ であるから，$3\times\angle \mathrm{A'PB}=180^\circ$

したがって，$\angle \mathrm{A'PB}=60^\circ$ より，$\triangle \mathrm{A'PB}$ は辺の比が $1:2:\sqrt{3}$ である直角三角形である。

よって，$\mathrm{AP}:\mathrm{PB}=2:1$ より，$\mathrm{AP}=\mathrm{AP'}=2,\ \mathrm{PB}=1,\ \mathrm{A'B}=\sqrt{3}$　………（☆）

また，$\angle \mathrm{PA'R}=90^\circ$ より，$\angle \mathrm{RA'C}=60^\circ$ であるから，$\triangle \mathrm{A'PB}\backsim\triangle \mathrm{RA'C}$

よって，$\mathrm{A'C}=\mathrm{BC}-\mathrm{A'B}=3-\sqrt{3}$ より，$\mathrm{RC}=\sqrt{3}\times(3-\sqrt{3})=3\sqrt{3}-3$

さらに，$\angle \mathrm{RCA'}=\angle \mathrm{RD'Q}=90^\circ$ と，対頂角が等しいことから，$\triangle \mathrm{RA'C}\backsim\triangle \mathrm{RQD'}$

ここで，$\mathrm{RQ}:\mathrm{QD'}=2:1,\ \mathrm{DQ}=\mathrm{QD'}$ であるから，$\mathrm{DQ}=x$ とすると，線分CDの長さについて

$x+2x+(3\sqrt{3}-3)=3$ が成り立つ。よって　$x=2-\sqrt{3}$

ゆえに，$\mathrm{DQ}=2-\sqrt{3}$　………　答

別解（☆）のつづき

点Dを通り，PQに平行な直線をひき，辺ABとの交点をEとすると，四角形EPQDは平行四辺形である。

また，$\angle \mathrm{AED}=60^\circ$ が成り立つので，$\mathrm{AE}=\dfrac{\mathrm{AD}}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$

ゆえに，$\mathrm{DQ}=\mathrm{EP}=\mathrm{AP}-\mathrm{AE}=2-\sqrt{3}$　………　答

（3）　操作をやめるまでに取り出したボールの個数を n とし，以下のそれぞれの場合について，取り出されたボールに書かれた数字の和がちょうど10になる確率を求める。

（ⅰ）$n=1$ のとき

最初に10の数字が書かれたボールを取り出す場合であるから　$\dfrac{1}{10}$

（ⅱ）$n=2$ のとき

１個目と２個目のボールに書かれた数字の組み合わせが，（1，9），（2，8），（3，7），（4，6）のいずれかの場合で，数字の出る順序の入れ替えも考えると　$\dfrac{4\times 2}{10\times 9}=\dfrac{8}{90}$

（ⅲ）$n=3$ のとき

１個目から３個目のボールに書かれた数字の組み合わせが，（1，2，7），（1，3，6），（1，4，5），（2，3，5）のいずれかの場合で，数字の出る順序の入れ替えも考えると　$\dfrac{4\times 6}{10\times 9\times 8}=\dfrac{24}{720}$

（ⅳ）$n=4$ のとき

１個目から４個目のボールに書かれた数字の組み合わせが，（1，2，3，4）の場合で，数字の出る順序の入れ替えも考えると　$\dfrac{1\times 24}{10\times 9\times 8\times 7}=\dfrac{24}{5040}$

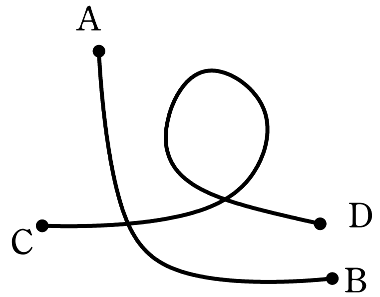
（ⅴ）$n\geqq 5$ のとき

１個目から４個目のボールに書かれた数字の合計の最小値が10であるから，5個目のボールを取り出すことはない。したがって，この場合の確率は0

以上（ⅰ）～（ⅴ）から，求める確率は

$$\frac{1}{10}+\frac{8}{90}+\frac{24}{720}+\frac{24}{5040}+0=\frac{143}{630}$$　………　答

（4）　答えは複数あるので，1つだけ例示します。



$\boxed{2}$ 与えられた条件 AD∥BC と，四角形 ABYX と四角形 XYCD がそれぞれ円に内接することから

$$\angle XAB+\angle XDC=\angle XYC+\angle XYB=180^\circ$$

よって，四角形 ABCD は平行四辺形である。

ゆえに，四角形 ABCD の面積は △AYD の面積の 2 倍となり，△AYD の面積が最大となるとき，四角形 ABCD の面積は最大となる。

ここで，∠YAX と∠YDX が円周角の定理によりそれぞれ一定であることから，∠AYD は一定である。

よって，２辺の積 AY・DY が最大のとき，△AYD の面積は最大となる。

AY が最大となるのは AY が 円 O の直径と一致するときであるが，このとき DY も円 O′ の直径と一致し最大となる。したがって，△AYD の面積が最大となるのは，AY＝20，DY＝15 のときである。

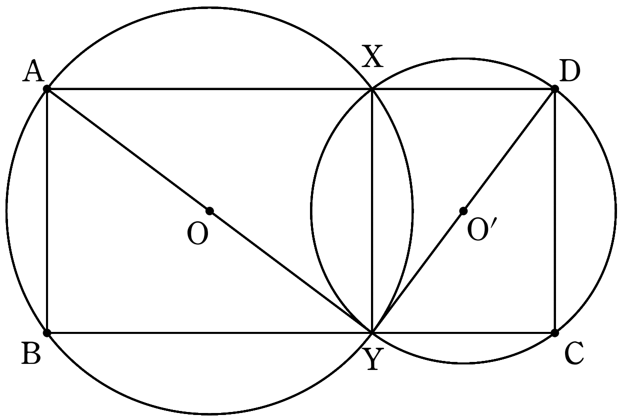
このとき，∠AXY＝∠DXY＝90° であることから

$$AD=\sqrt{20^2-12^2}+\sqrt{15^2-12^2}=16+9=25$$

したがって，$AD^2=AY^2+DY^2$ が成り立つので， △AYD は ∠AYD＝90° の直角三角形である。

以上のことから，四角形 ABCD の面積の最大値は,

$$2\times\left(\frac{1}{2}\times20\times15\right)=300 \quad \cdots\cdots\cdots \text{答}$$



$\boxed{3}$ A : 山登り，B : 海水浴，C : 家で休養，とし，3 つの文字 A，B，C をいくつかずつ用いて 7 つ並べる並べ方を考える。

並べ方の総数は，3^7 通り。

このうち「A が 3 つ以上続く」または「B が 3 つ以上続く」並べ方は以下の（ⅰ）～（ⅴ）の場合である。

（ⅰ）「A がちょうど 7 つ続く」または「B がちょうど 7 つ続く」場合

2 通り

（ⅱ）「A がちょうど 6 つ続く」または「B がちょうど 6 つ続く」場合

連続する 6 つの文字の決め方は 2 通り，並べる箇所の決め方は 2 通り，残りの文字の決め方は 2 通り

したがって，このときの並べ方は

$2\times2\times2=8$ 通り

（ⅲ）「A がちょうど 5 つ続く」または「B がちょうど 5 つ続く」場合

連続する 5 つの文字の決め方は 2 通り，

並べる箇所の決め方は右の (ア) ～ (ウ) の 3 通り

残りの文字の並べ方は

(ア)，(イ) のとき，それぞれ　$2\times3=6$ 通り，

(ウ) のとき　$2\times2=4$ 通り

したがって，このときの並べ方は,

(ア) (連続する5つ) ○ ○
(イ) ○ ○ (連続する5つ)
(ウ) ○ (連続する5つ) ○

$2\times6\times2+2\times4=32$ 通り

（ⅳ）「A がちょうど 4 つ続く」または「B がちょうど 4 つ続く」場合

(エ) (連続する4つ) ○ ○ ○
(オ) ○ (連続する4つ) ○ ○
(カ) ○ ○ (連続する4つ) ○
(キ) ○ ○ ○ (連続する4つ)

連続する 4 つの文字の決め方は 2 通り，

並べる箇所の決め方は右の (エ) ～ (キ) の 4 通り

残りの文字の決め方は

(エ)，(キ) のとき，それぞれ　$2\times3\times3=18$ 通り，

(オ)，(カ) のとき，それぞれ　$2\times2\times3=12$ 通り

したがって，このときの並べ方は,

$2\times18\times2+2\times12\times2=72+48=120$ 通り

（ｖ）「A がちょうど 3 つ続く」または「B がちょうど 3 つ続く」場合

(ク) (連続する3つ) ○ ○ ○ ○
(ケ) ○ (連続する3つ) ○ ○ ○
(コ) ○ ○ (連続する3つ) ○ ○
(サ) ○ ○ ○ (連続する3つ) ○
(シ) ○ ○ ○ ○ (連続する3つ)

連続する 3 つの文字の決め方は 2 通り

並べる箇所の決め方は右の (ク) ～ (シ) の 5 通り

残りの文字の決め方は,

(ク)，(シ) のとき，それぞれ　$2\times3\times3\times3=54$ 通り

(ケ)，(コ)，(サ) のとき，それぞれ　$2\times2\times3\times3=36$ 通り

ただし，右の (ス) ～ (チ) の場合が重複して数えられているので，その分を除かなければならない。

(ス) (連続する3つ) (連続する3つ) ○
(セ) ○ (連続する3つ) (連続する3つ)
(ソ) (連続する3つ) ○ (連続する3つ)
(タ) (連続する4つ) (連続する3つ)
(チ) (連続する3つ) (連続する4つ)

重複して数えているものは,

(ス)，(セ) のとき，それぞれ　$2\times2=4$ 通り

(ソ) のとき $2\times2+2=6$ 通り

また，(タ)，(チ) は（ⅳ）と重複していて，それぞれ　2 通り

したがって，重複して数えているものは全部で $4\times2+6+2\times2=18$ 通り

よって，このときの並べ方は,

$2\times54\times2+2\times36\times3-18=414$ 通り

（ⅰ）～（ｖ）より，A も B も 3 つ以上続かない並べ方は

$3^7-(2+8+32+120+414)=1611$ 通り

以上より，求める計画の立て方は　1611 通り　………　答

別解 その 1

A : 山登り，B : 海水浴，C : 家で休養，とし，A，B，C をいくつかずつ用いて 7 つ並べる並べ方を考える。

並べ方の総数は，3^7 通り。

このうち「A が 3 つ以上続く」または「B が 3 つ以上続く」並べ方は以下の（ⅰ）～（ｖ）の場合である。

（ⅰ）初日から「A が 3 つ以上続く」または「B が 3 つ以上続く」場合

(AAA) ○○○○ の並びは，3^4 通り。

(BBB) も同様であるので，$2\times3^4=162$ 通り。

（ⅱ）2 日目から「A が 3 つ以上続く」または「B が 3 つ以上続く」場合

(AAA) について，B (AAA) ○○○ または C (AAA) ○○○ の並びは，2×3^3 通り。

(BBB) も同様であるので，$2\times2\times3^3=108$ 通り。

（ⅲ）3 日目から「A が 3 つ以上続く」または「B が 3 つ以上続く」場合

(AAA) について，○B (AAA) ○○ または ○C (AAA) ○○ の並びは，2×3^3 通り。

(BBB) も同様であるので，$2\times2\times3^3=108$ 通り。

（ⅳ）4 日目から「A が 3 つ以上続く」または「B が 3 つ以上続く」場合

（AAA）について，○○B（AAA）○ または○○C（AAA）○ の並びは，2×3^3 通り。

ただし，BBB（AAA）○ の並びは（ i ）と重複するので除くと，$2\times3^3-3$ 通り

（BBB）も同様であるので，$2\times(2\times3^3-3)=102$ 通り。

（v）5 日目から「A が 3 つ以上続く」または「B が 3 つ以上続く」場合

（AAA）について，○○○B（AAA）または○○○C（AAA）の並びは，2×3^3 通り。

ただし，AAAB（AAA），AAAC（AAA），BBBB（AAA），BBBC（AAA）の並びは（ i ）と重複し，

ABBB（AAA），CBBB（AAA）の並びは（ii）と重複するので除くと，$2\times3^3-6$ 通り

（BBB）も同様であるので，$2\times(2\times3^3-6)=96$ 通り。

したがって，A，B，C のいくつかずつを用いて 7 つ並べるとき，A も B も 3 つ以上続かない並べ方は，

$$3^7-(162+108+108+102+96)=1611 \text{ 通り}$$

以上より，求める計画の立て方は，1611 通り　………　答

別解 その 2

問題文の条件を満たす n 日間の計画の立て方の総数を p_n とおく。

また，その中で最終日の過ごし方が「山登り」「海水浴」「家で休養」であるものをそれぞれ a_n，b_n，c_n とおくと

$$a_n+b_n+c_n=p_n \quad \cdots \quad ①$$

ここで，説明のため「山登り」「海水浴」「家で休養」の過ごし方をそれぞれ A，B，C とおく。

まず，明らかに $p_1=3$，$p_2=3^2=9$

p_3 については，すべての計画の立て方から 3 日間連続で A を行った場合と 3 日間連続で B を行った場合の 2 通りを除けばよいから，$p_3=3^3-2=25$

次に，$n\geqq4$ のときの p_n について考える。

p_{n-1} 通りのそれぞれの計画に，n 日目の過ごし方として A，B，C のうちいずれかを加えると，

全部で $3\times p_{n-1}$ 通りの計画を立てることができる。

このうち，問題文の条件を満たさないものは，最後の 3 日間が連続で A になる場合と連続で B になる場合である。

最後の 3 日間が A になるものの総数は，$n-3$ 日目は A ではないので $b_{n-3}+c_{n-3}$ 通り。

同様に，最後の 3 日間が B で終わるものの総数は，$n-3$ 日目は B ではないので $a_{n-3}+c_{n-3}$ 通り。

以上より

$$p_n=3\times p_{n-1}-(b_{n-3}+c_{n-3})-(a_{n-3}+c_{n-3})=3\times p_{n-1}-p_{n-3}-c_{n-3} \quad \cdots \quad ② \text{（①より）}$$

②に $n=4$ を代入すると $p_4=3\times p_3-p_1-c_1=3\times25-3-1=71$

$n\geqq5$ のときは $c_{n-3}=p_{n-4}$ が成り立つので，②は $p_n=3\times p_{n-1}-p_{n-3}-p_{n-4}$

よって，順に $n=5$，$n=6$，$n=7$ を代入して計算すると，

$$p_5=3\times p_4-p_2-p_1=3\times71-9-3=201$$

$$p_6=3\times p_5-p_3-p_2=3\times201-25-9=569$$

$$p_7=3\times p_6-p_4-p_3=3\times569-71-25=1611 \quad \cdots\cdots\cdots \text{ 答}$$

参考

2，4，8，16，32，…　のように，ある規則にしたがって並べた数の列を「数列」とよぶ。

数列においては，1 番目の数を初項，2 番目の数を第 2 項，3 番目の数を第 3 項，…　とよび，記号で p_1，p_2，p_3，…　のように表す。第 n 項ならば p_n，第 $(n+1)$ 項ならば p_{n+1} となる。

また，たとえば $p_{n+1}=3p_n-2$ のように，数列の項同士の関係を表した式は「漸化式」とよばれる。

これらは，高校の数学Bで学ぶ考え方の一つである。この漸化式を利用することで，複雑な数式を簡潔に表すことができるなど，さまざまな場面で活用されている。これから学習する人は楽しみにしてほしい。

$\boxed{4}$ まず，S の要素の個数が 1009 以上にはならないことを示す。

2016÷16＝126 より，次のようなそれぞれ 16 個の要素からなる 126 個の集合，A_0，A_1，A_2，…，A_{125} を考える。

$A_0=\{0, 1, 2, 3, \cdots, 15\}$，$A_1=\{16, 17, 18, 19, \cdots, 31\}$，$A_2=\{32, 33, 34, 35, \cdots, 47\}$，…

…，$A_{125}=\{2000, 2001, 2002, 2003, \cdots, 2015\}$

これらは，整数 n を用いて，

$A_n=\{16n, 16n+1, 16n+2, \cdots, 16n+15\}$ $(0\leqq n\leqq 125)$

と表すことができる。

ここで，各 A_n の 16 個の要素について，

$(16n,\ 16n+5)$，$(16n+10,\ 16n+15)$，$(16n+4,\ 16n+9)$，$(16n+14,\ 16n+3)$，

$(16n+8,\ 16n+13)$，$(16n+2,\ 16n+7)$，$(16n+12,\ 16n+1)$，$(16n+6,\ 16n+11)$

という 8 つのペアを考えると，これらの要素はいずれも重複せず，すべてのペアで差が 5 または 11 となっている。

S の要素は差が 5 にも 11 にもならないので，各ペアの両方の数が同時に S の要素になることはない。

よって，各 A_n に含まれる S の要素の個数は，それぞれ 8 個以下であることがわかる。 ……①

ここで，もし集合 S の要素の個数が 1009 以上であると仮定すると，1008÷126＝8 より，S の要素が 9 個以上含まれるような A_n が少なくとも 1 つ存在することになり，①に矛盾する。

よって，S の要素の個数は 1009 以上にはならない。

実際，1008 個の偶数からなる集合 $\{0,\ 2,\ 4,\ \cdots,\ 2014\}$ は，どの 2 つの差も偶数であるから 5 にも 11 にもならず，S の条件を満たしている。

以上より，集合 S の要素の個数の最大値は，1008 ……… 答

参考

5 ずつ増加する数の列　0, 5, 10, 15, 20, 25, …　を考え，隣り合う 2 数でペアをつくれば，その差は 5 になる。

上記のペアを考える際には，5＋11＝16 であることから，この数の列を 16 で割った余りに着目した。

別解

2 つの正の整数 a と b が互いに素（最大公約数が 1）であるとき，

$0,\ a,\ 2a,\ 3a,\ 4a,\ \cdots,\ (b-1)a$

をそれぞれ b で割った余りはすべて異なる。（※）

この性質を用いると，5 と 16 は互いに素であるから

$0,\ 1\times5,\ 2\times5,\ 3\times5,\ 4\times5,\ \cdots,\ (16-1)\times5$

を 16 で割った余りはすべて異なり，0, 1, 2, 3, 4, …, 15 のいずれかに等しい。

実際には，

0, 5, 10, 15, 4, 9, 14, 3, 8, 13, 2, 7, 12, 1, 6, 11　…　①

である。

この数列①の隣同士の項は，必ず差が 5 または 11 であることに着目すれば，

$\{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \cdots,\ 15\}$

の部分集合のうち，与えられた条件を満たすもので要素の個数が最大のものは，①の数列から 1 つおきに取り出した項を要素とする集合

$\{0,\ 10,\ 4,\ 14,\ 8,\ 2,\ 12,\ 6\}$ …　②　　または　　$\{5,\ 15,\ 9,\ 3,\ 13,\ 7,\ 1,\ 11\}$ …　③

であることがわかる。このとき，②は偶数のみ，③は奇数のみの集合であるから，それぞれの集合においてどの2つの要素をとってもその差は偶数であり，5にも11にもならない。

同様に考えれば，0から2015までの整数のうち，16の倍数から始まる連続する16個の数からなる集合

$A_n=\{16n+0,\ 16n+1,\ \cdots,\ 16n+15\}$ （nは整数）… ④

についても，与えられた条件を満たす部分集合のうち要素の個数が最大のものは，

$\{16n+0,\ 16n+10,\ 16n+4,\ 16n+14,\ 16n+8,\ 16n+2,\ 16n+12,\ 16n+6\}$

または，

$\{16n+5,\ 16n+15,\ 16n+9,\ 16n+3,\ 16n+13,\ 16n+7,\ 16n+1,\ 16n+11\}$

のいずれかであることがわかる。

すなわち，A_nの16個の要素のうち「偶数ばかりの8個」または「奇数ばかりの8個」のいずれかをSの要素とすることができるが，この8個が最大で，9個以上をSの要素とすることはできない。

ここで，0から2015までには2016個の整数があり$2016=16\times126$であるから，集合$\{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \cdots,\ 2015\}$は，④において$n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 125$とした126個の集合$A_0$，$A_1$，$A_2$，…，$A_{125}$に分割することができる。

したがって，各A_nから最大8個の要素をSの要素とすることができるので，Sの要素の個数の最大値としてありうる値は $8\times126=1008$ である。実際，各A_nから「偶数ばかりの8個」をSの要素とすれば，この1008個の要素はすべて偶数となるので，どの2つの差も5にも11にもならずSの条件を満たしている。（※※）

したがって，Sに属する要素の個数の最大値は　1008　………　答

参考　※の証明

2つの正の整数aとbが互いに素（最大公約数が1）であるとき

$a,\ 2a,\ 3a,\ 4a,\ \cdots,\ (b-1)a$　…　①

について考える。

①の$(b-1)$個の数をそれぞれbで割った余りのうち，少なくとも一組は同じ値であると仮定し，余りが同じ数をia，jaとおく（i，jはともに1以上 $b-1$ 以下の整数で，$i<j$）

このとき，$(j-i)a$はbの倍数となるが，aとbが互いに素であるから$(j-i)$がbの倍数。

ところが，$1\leqq(j-i)\leqq b-2<b$であるから，これは矛盾。

したがって，①をそれぞれbで割った余りはすべて異なる。

また，①にはbの倍数が存在しないから，これらの余りはすべて0でない。

以上から，$0,\ a,\ 2a,\ 3a,\ 4a,\ \cdots,\ (b-1)a$をそれぞれ$b$で割った余りはすべて異なる。（証明終）

参考　※※の補足

各A_nから「奇数ばかりの8個」をSの要素としてもよい。

5 （証明）

2 色の積み木をいくつか積み上げてつくられる直方体で，縦の長さが a cm，横の長さが b cm，高さが c cm のものを「$a\times b\times c$ の直方体」と表すことにする。すべての L は「 $3\times7\times127$ の直方体」である。また，L を 127 個に分割してできる「 $3\times7\times1$ の直方体」を M，M を 7 個に分割してできる「$3\times1\times1$ の直方体」を N とよぶ。

さらに，M に対して，次の条件 1 ～ 3 をすべて満たす直方体を「よい四角形」と定義する。

（条件 1 ）直方体 M に含まれる積み木のいくつかでできている。

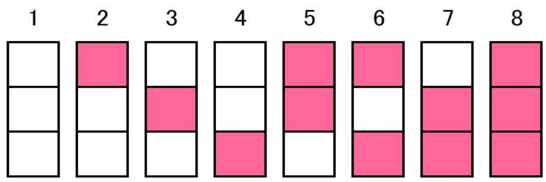
（条件 2 ）縦と横の長さがともに 2 cm 以上である。

（条件 3 ）4 つの隅の積み木がすべて同じ色である。

まず，どの M にも「よい四角形」が必ず存在することを示す。

N の色のパターンとしてありうるものは，図 1 の 1 番から 8 番までの 8 通りあるので，これらを「1 番の N」「2 番の N」……と順に名付ける。

図 1



※網掛けが赤色
その他が青色

M は 7 個の N に分割することができるが，これら 7 個の N の番号の中に重複がある場合は，その重複した番号の N 同士によって「よい四角形」ができる。重複がない場合は「1 番と 2 番」または「7 番と 8 番」の少なくとも一方の N のペアは必ず存在するので，そのペアで「よい四角形」ができる。

したがって，どの M にも「よい四角形」が必ず存在する。

ここで，2 個の M に対して「よい四角形が等しい」と「よい四角形が異なる」を次のように定義する。

2 個の M を重ねてできる $3\times7\times2$ の直方体について，互いの「よい四角形」で， 8 つの隅の積み木がすべて同じ色である高さ 2 cm の直方体ができるとき，この 2 個の M は「よい四角形が等しい」と定義し，できないときは「よい四角形が異なる」と定義する。

次に，すべての L に対して，その L を分割してできる 127 個の M のうち少なくとも 2 個の M は「よい四角形が等しい」ことを示す。

「よい四角形」について 4 つの隅の積み木の位置と色に注目すると，位置の決め方が ${}_3C_2\times{}_7C_2=3\times21=63$ 通り，色の決め方が 2 通りあるので， 位置と色の決め方は全部で $63\times2=126$ 通りある。このことから，互いに「よい四角形が異なる」ような M は最大で 126 個存在することがわかる。

ところが，いま 127 個の M があるので，少なくとも 2 個のM は「よい四角形が等しい」。

したがって，すべての L に対して，その L を分割してできる 127 個の M のうち少なくとも 2 個の M は「よい四角形が等しい」。

「よい四角形が等しい」ような 2 個の Mで「よい直方体」ができるので， L は必ず「よい直方体」を含む。

（証明終）