1　正三角形 ABC の外接円の，A を含まない弧 BC 上に点 P をとる．このとき，

$$AP = BP + CP$$

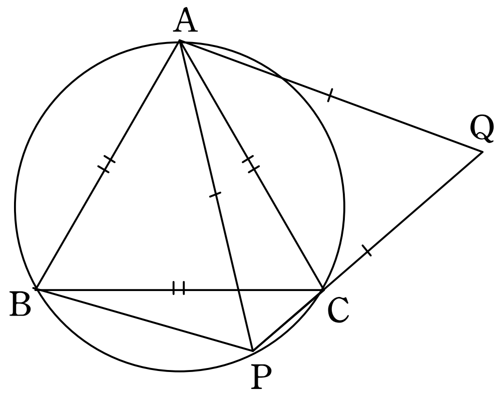
となることを示せ．

(解説)

円周角の定理より，

$$\angle APC = \angle ABC = 60^\circ$$

であるから，図のように直線 PC 上に点 Q を，三角形 APQ が正三角形となるようにとることができる．




三角形ABP と 三角形ACQ において，

$$AB = AC,\ AP = AQ$$

であり，

$$\angle BAP = \angle CAP = 60^\circ - \angle PAC$$

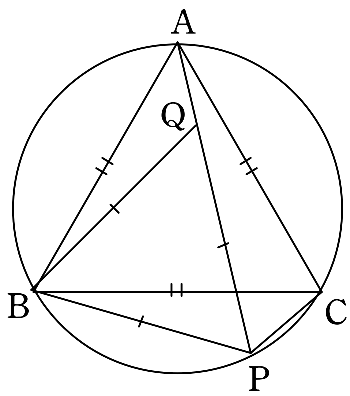
であるから，2 辺とその間の角がそれぞれ等しく，三角形ABP と三角形ACQ は合同である．

したがって，

$$BP + CP = CQ + CP = PQ = AP$$

となる．

別解　線分 AP 上に点 Q を，BP = QP となるようにとる．




円周角の定理より，

$$\angle APB = \angle ACB = 60^\circ$$

であるから，三角形 BPQ は正三角形となり，BQ = BP が成り立つ．

三角形 ABQ と三角形 CBP において，

$$AB = CB,\ BQ = BP$$

であり，

$$\angle ABQ = \angle CBP = 60^\circ - \angle CBQ$$

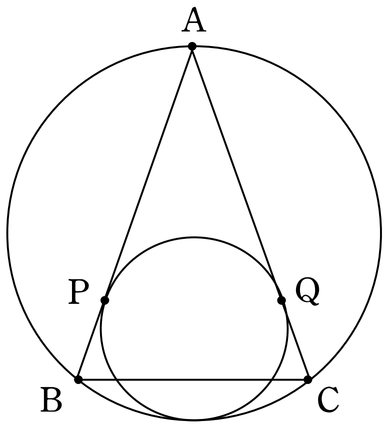
であるから，2 辺とその間の角がそれぞれ等しく，三角形 ABQ と三角形 CBP は合同である．

したがって，

$$AP = PQ + AQ = BP + CP$$

2 〔1978 IMO 第 4 問〕（改題）

AB＝AC の二等辺三角形 ABC がある。この三角形の外接円および AB, AC に接する円を考え，AB，AC との接点をそれぞれ P，Q とする。このとき，線分 PQ の中点は △ABC の内心であることを証明せよ。



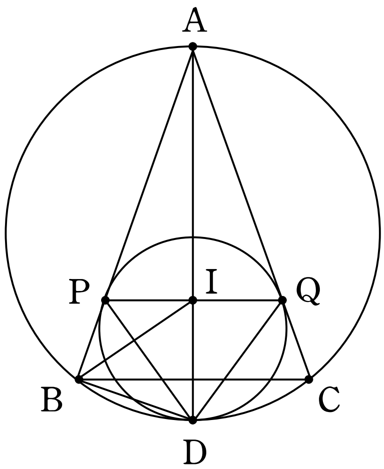

解説

【解答１】

（証明）

線分 PQ の中点を I とすると，対称性から線分 AI は ∠BAC の二等分線である.

次に，直線 AI と △ABC の外接円の交点を D とする．点 D は 2 円の接点である.




円の接線と弦のつくる角の性質より

$\angle\mathrm{BPD}=\angle\mathrm{PQD}$ ……①

対称性より　$\angle\mathrm{PQD}=\angle\mathrm{QPD}$ ……②

①，②より　$\angle\mathrm{BPD}=\angle\mathrm{IPD}$ ……③

$\angle\mathrm{PID}=\angle\mathrm{ABD}=90^\circ$ であるから，$\triangle\mathrm{PDI}\equiv\triangle\mathrm{PDB}$

したがって，PB＝PI となり三角形 PBI は二等辺三角形であるから

$\angle\mathrm{PIB}=\angle\mathrm{PBI}$ ……④

PQ∥BC より　$\angle\mathrm{PIB}=\angle\mathrm{IBC}$ ……⑤

④，⑤ より　$\angle\mathrm{PBI}=\angle\mathrm{IBC}$

したがって，線分 BI は ∠ABC の二等分線である.

以上より，点 I は △ABC の内心である.

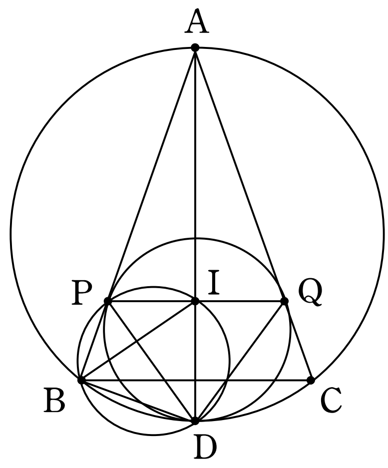
すなわち，線分 PQ の中点は △ABC の内心である.　（終）

【解答２】

（証明）

線分 PQ の中点を I とすると，対称性から線分 AI は ∠BAC の二等分線である.

次に，直線 AI と △ABC の外接円の交点を D とする．点 D は 2 円の接点である.




PQ∥BC より　$\angle APQ=\angle ABC$　……①

円の接線と弦のつくる角の性質より

$\angle APQ=\angle PDQ$　……②

①，②より　$\angle ABC=\angle PDQ$　……③

$\angle PID=90^\circ$，$\angle ABD=90^\circ$ であるから，4 点 P，B，D，I は同一円周上にある。

円周角は等しいから　$\angle PDI=\angle PBI$　……④

また，対称性より $\angle PDI=\frac{1}{2}\angle PDQ$ であるから，

③，④ より $\angle PBI=\frac{1}{2}\angle ABC$

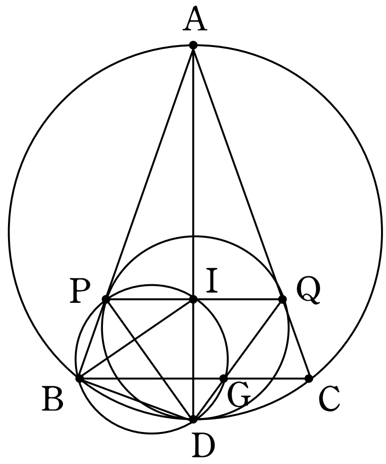
よって，線分 BI は ∠ABC の二等分線である．

以上より，点 I は △ABC の内心である．

すなわち，線分 PQ の中点は △ABC の内心である．　（終）

【解答 3】

（証明）




線分 PQ の中点を I とすると，対称性から線分 AI は ∠BAC の二等分線である。

次に，直線 AI と △ABC の外接円の交点を D とする．点 D は 2 円の接点である．

PQ∥BC より　$\angle APQ=\angle ABC$　……①

円の接線と弦のつくる角の性質より

$\angle APQ=\angle PDQ$　……②

①，②より　$\angle ABC=\angle PDQ$　……③

$\angle PID=90^\circ$，$\angle ABD=90^\circ$ であるから，4 点 P，B，D，I は同一円周上にある．

線分 BC と線分 DQ の交点を G とすると，③より G も 4 点 P，B，D，I と同じ円周上にある．

円周角は等しいから　$\angle PDI=\angle PBI$　……④

$\angle GBI=\angle GDI$　……⑤

対称性より　$\angle PDI=\angle QDI$　……⑥

④，⑤，⑥ より　$\angle PBI=\angle GBI$

よって，線分 BI は ∠ABC の二等分線である．

以上より，点 I は △ABC の内心である．

すなわち，線分 PQ の中点は △ABC の内心である．　（終）

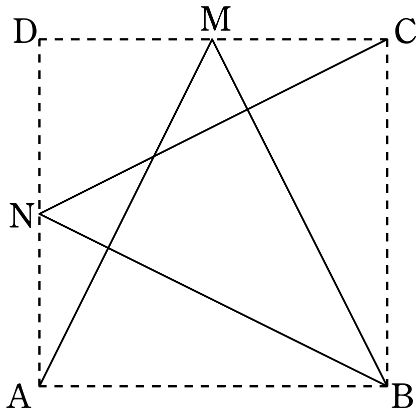
3 [1985 東京大]（改題）

右図において，ABCD は一辺の長さ 1km の正方形で，M，N はそれぞれ辺 CD，DAの 中点である．

いま，甲，乙は同時刻にそれぞれ A，B を出発し，同じ一定の速さで歩くものとする．甲は図の実線で示した道 AMB 上を進み，乙は実線で示した道 BNC 上を進み，30分後に甲は B に，乙は C に到着した．

甲，乙が最も近づいたのは出発してから何分後か．

また，そのときの両者の間の距離はいくらか．




解説

正方形 ABCD の対角線 AC，BD の交点を O，$t$ 分後の甲，乙の位置をそれぞれ P，Q とする．図形は直線 BD に関して対称であるから，点 P が線分 AM 上にあるときを考えればよい．三角形 APO と三角形 BQO において，

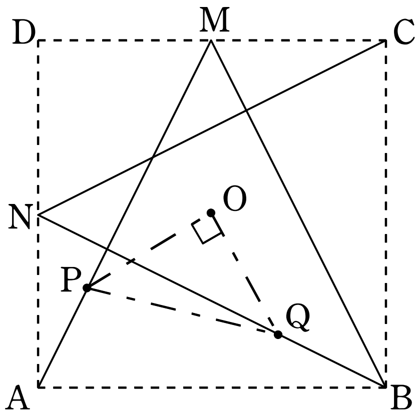
$AP = BQ$ , $AO = BO$ , $\angle OAP = \angle OBQ$

であるから，三角形 APO と三角形 BQO は合同である．

よって，$OP = OQ$ であり，また，$\angle AOP = \angle BOQ$ で，$\angle AOB = 90°$ であるから，

$$\angle POQ = \angle AOB - \angle BOQ + \angle AOP = 90°$$

となるため，三角形 POQ は直角二等辺三角形である．

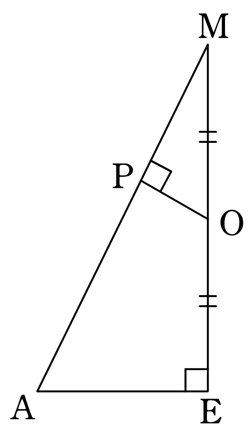



したがって，PQ が最小になるとき，OP も最小になるので，OP が最小となるような点 P の位置を考えればよい．OP が最小となるのは $OP \perp AM$ が成り立つときであるから，このとき辺 AB の中点を E とおくと，右図より，三角形 POM と三角形 EAM は相似である．よって，

$$MP : OM = ME : AM$$

$$MP : \frac{1}{2} = 1 : \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$MP = \frac{\sqrt{5}}{5} \quad \text{すなわち，} MP = \frac{2}{5} \times \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{2}{5} AM$$



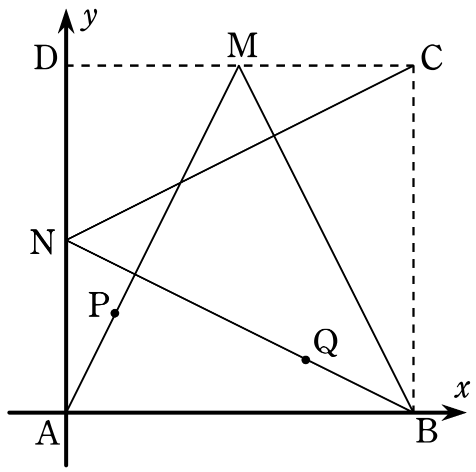

これより OP が最小となるのは，出発後 $15 \times \dfrac{3}{5} = 9$ 分後である．

点 P が線分 MB 上にあるときは，対称性より $30 - 9 = 21$ 分後に OP が最小となる．ゆえに，PQ は 9 分後と 21 分後に最小となり，

その距離は，$\sqrt{2} \times OP = \sqrt{2} \times \dfrac{1}{2} MP = \dfrac{\sqrt{10}}{10}$ (km) となる．

別解　$t$ 分後の甲，乙の位置をそれぞれ P，Q とする．

正方形 ABCD を，辺 AB が $x$ 軸上，辺 AD が $y$ 軸上，点 A が原点となるようにおく．AB=AD=1 とする．




[1]　$0 \leqq t \leqq 15$ のとき，

$$\mathrm{P}\left(\frac{t}{30},\ \frac{t}{15}\right),\ \mathrm{Q}\left(1-\frac{t}{15},\ \frac{t}{30}\right)$$

であるから，

$$\begin{aligned}\mathrm{PQ} &= \sqrt{\left\{\frac{t}{30}-\left(1-\frac{t}{15}\right)\right\}^2+\left(\frac{t}{15}-\frac{t}{30}\right)^2}\\ &= \sqrt{\frac{t^2}{90}-\frac{t}{5}+1}\\ &= \sqrt{\frac{1}{90}(t-9)^2+\frac{1}{10}}\end{aligned}$$

したがって，$t=9$ (分後) のとき PQ は最小となり，距離は $\sqrt{\dfrac{1}{10}}=\dfrac{\sqrt{10}}{10}$ (km)

[2]　$15 \leqq t \leqq 30$ のとき，

$$\mathrm{P}\left(\frac{t}{30},\ 1-\frac{t-15}{15}\right),\ \mathrm{Q}\left(\frac{t-15}{15},\ \frac{t}{30}\right)$$

であるから，

$$\begin{aligned}\mathrm{PQ} &= \sqrt{\left\{\frac{t}{30}-\left(1-\frac{t-15}{15}\right)\right\}^2+\left(\frac{t-15}{15}-\frac{t}{30}\right)^2}\\ &= \sqrt{\frac{t^2}{90}-\frac{7}{15}t+5}\\ &= \sqrt{\frac{1}{90}(t-21)^2+\frac{1}{10}}\end{aligned}$$

したがって，$t=21$ (分後) のとき PQ は最小となり，距離は $\sqrt{\dfrac{1}{10}}=\dfrac{\sqrt{10}}{10}$ (km)

[1]，[2] より，甲，乙が最も近づいたのは出発後 9 分後と 21 分後で，

その距離は $\dfrac{\sqrt{10}}{10}$ (km)

4 [2005 JMO予選 問題 9]

正五角形 ABCDE の内部に，$\angle ABP=6^\circ$，$\angle AEP=12^\circ$ となるように点 P をとる．このとき，$\angle PAC$ の大きさを求めよ．

解説

正五角形の 1 つの内角の大きさは $108^\circ$ である．

三角形 AEF が正三角形となるように，正五角形 ABCDE の外部に点 F をとる．

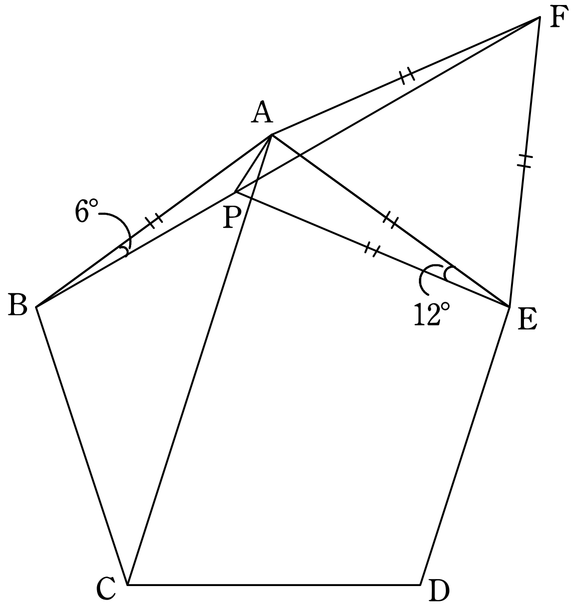
$\angle BAF = \angle BAE + \angle EAF = 168^\circ$

$AB = AE = AF$

であるから，三角形 ABF は二等辺三角形で，

$\angle ABF = (180^\circ - \angle BAF) \div 2 = 6^\circ = \angle ABP$

となるため，3点 B, P, F は一直線上にある．




また，三角形 EDF について，

$\angle EFP = \angle EFA - \angle AFP = 54^\circ$

$\angle FEP = \angle FEA + \angle AEP = 72^\circ$

だから，

$\angle EPF = 180^\circ - (\angle EFP + \angle FEP) = 54^\circ$

$= \angle EFP$

よって，三角形 EPF は $EP = EF$ の二等辺三角形である．

これより，$EP = EF = EA$ となるので，三角形 EPA は $EP = EA$ の二等辺三角形であるから，

$\angle EAP = (180^\circ - \angle AEP) \div 2 = 84^\circ$

$\angle BAC = (180^\circ - \angle ABC) \div 2 = 36^\circ$ より，$\angle EAC = 108^\circ - \angle BAC = 72^\circ$ だから，

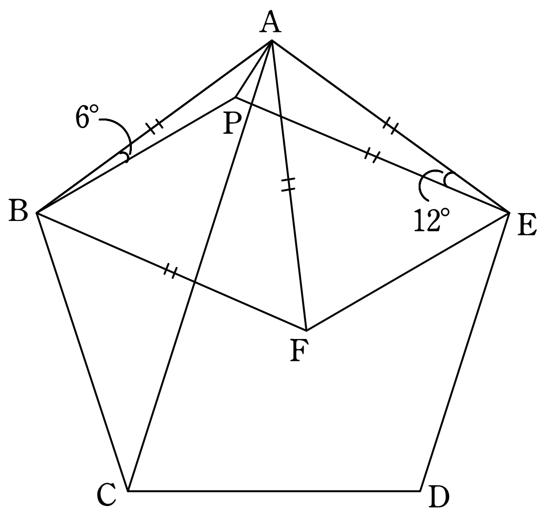
$\angle PAC = \angle EAP - \angle EAC = 12^\circ$

別解　正五角形の 1 つの内角の大きさは $108^\circ$ である．

三角形 ABF が正三角形となるように，正五角形 ABCDE の内部に点 F をとると，

$\angle PBF = \angle ABF - \angle ABP = 54^\circ$　…… ①

$\angle EAF = \angle BAE - \angle BAF = 48^\circ$




三角形 AEF は $AE = AF$ の二等辺三角形となるので，

$\angle AEF = \angle AFE = (180^\circ - \angle EAF) \div 2$

$= 66^\circ$

これより，

$\angle FEP = \angle AEF - \angle AEP = 54^\circ$　…… ②

$\angle BFE = \angle AFB + \angle AFE = 126^\circ$　…… ③

①，②，③ より

$\angle PBF + \angle BFE = 180^\circ$，$\angle BFE + \angle FEP = 180^\circ$

であるから，四角形 BFEP は平行四辺形である．

よって，BF = PE となるから，AE = PE となり，三角形 AEP は二等辺三角形となる．

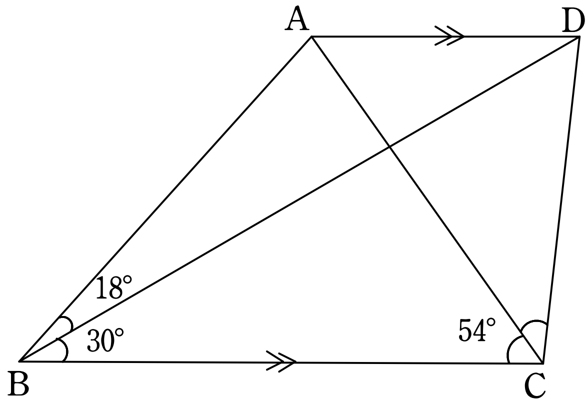
したがって，

$\angle \mathrm{EAP} = (180° - \angle \mathrm{AEP}) \div 2 = 84°$

$\angle \mathrm{BAC} = (180° - \angle \mathrm{ABC}) \div 2 = 36°$ より，$\angle \mathrm{EAC} = 108° - \angle \mathrm{BAC} = 72°$ だから，

$\angle \mathrm{PAC} = \angle \mathrm{EAP} - \angle \mathrm{EAC} = 12°$

$\boxed{5}$　AD∥BCの台形ABCDにおいて，∠ABD＝18°，∠DBC＝30°，∠BCA＝54° のとき，∠ACDを求めよ。



解説

$\angle CAB=78^\circ$，$\angle BDA=30^\circ$，$\angle DAC=54^\circ$ であるから，直線 AC 上に，$\angle ABE=\angle CAB$ となるような点 E をとると，

$EA=EB$，$\angle BEA=24^\circ$，$\angle DBE=60^\circ$，$\angle CBE=30^\circ$

次に，直線BD上に $\angle BEF=60^\circ$ となるような点 F をとると，$\triangle BEF$は正三角形となる．

$\angle FBC=\angle CBE=30^\circ$ より点 E，F は直線 BC に関して対称であるから，$\angle CFB=\angle BEC=24^\circ$

また，$\angle AEF=36^\circ$，$EA=EB=EF$より，$\angle EFA=\angle FAE=72^\circ$

したがって，$\angle BFA=72^\circ-60^\circ=12^\circ$

$AD /\!/ BC$ より $\angle DAE=\angle BCA=54^\circ$ であるから，$\angle FAD=\angle FAE-\angle DAE=72^\circ-54^\circ=18^\circ$

よって，$\angle FAD=\angle ABF$より，$\triangle FAD \backsim \triangle FBA$

これより，$FD:FA=FA:FB$

$\angle ACF=180^\circ-\angle FAC-\angle AFC=72^\circ$ より $\angle FAC=\angle ACF$ であるから $FC=FA$

以上より

$FD:FC=FD:FA=FA:FB=FC:FB$

となるから，$\triangle FCD \backsim \triangle FBC$

ゆえに，$\angle DCF=\angle CEF=30^\circ$

したがって，$\angle ACD=72^\circ-30^\circ=42^\circ$