平成22年度　京都数学コンテスト　略解

$\boxed{1}$ ⑴ $\boxed{\text{解答}}$

（Ⅰ）中央をAとして考えるとき, Bは連続して並べないので, 中央Aの左側の並べ方は, 下図の5 通りである。中央Aの右側も同様にして考えるとそれぞれ 5 通りあるので, 全部で $5\times5=25$ 通りである。

（Ⅱ）中央をBとして考えるとき, 同様に中央Bの左側の並べ方は下図の3通りである。中央Bの右側も同様にして考えるとそれぞれ3通りあるので, 全部で$3\times3=9$通りである。

（Ⅰ）,（Ⅱ）から並べ方の総数は $25+9=34$ 　　　　34通り………$\boxed{\text{答}}$

（Ⅰ）のとき

A	A	A	A			
B	A	A	A			
A	B	A	A			
A	A	B	A			
B	A	B	A			

（Ⅱ）のとき

A	A	A	B			
B	A	A	B			
A	B	A	B			

$\boxed{\text{参考}}$　一般化して, 枠の個数が n のとき, 同様の問題を考える。

n 個の枠に並べる総数をa_n とすると,

1 番左がAのとき, 残りの $n-1$ 個の枠への並べ方は, a_{n-1} 通りある。

1 番左がBのとき, 左から2 番目はAしか並べないので, 残りの $n-2$ 個の枠への並べ方は a_{n-2} 通りある。

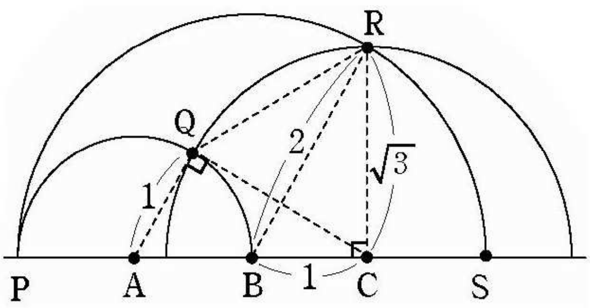
よって, 並べ方の総数は $a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$ と表せる。

(2) 解答

半弓形CSR＝扇形BSR－$\triangle BCR$

$$=\pi\cdot 2^2\cdot\frac{1}{6}-1\cdot\sqrt{3}\cdot\frac{1}{2}$$

$$=\frac{2}{3}\pi-\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \cdots\cdots①$$



扇形$CRQ=\pi\cdot\sqrt{3}^2\cdot\frac{1}{6}$

$$=\frac{1}{2}\pi \quad \cdots\cdots②$$

$\triangle ACQ=AQ\cdot CQ\cdot\frac{1}{2}=1\cdot\sqrt{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ ……③

扇形$AQP=\pi\cdot 1^2\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{3}\pi$ ……④

①＋②＋③＋④$=\left(\frac{2}{3}\pi-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\frac{1}{2}\pi+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{3}\pi=\frac{3}{2}\pi$ ……⑤

以上から，求める面積は半円BSP－⑤$=\pi\cdot 2^2\cdot\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\pi=\frac{\pi}{2}$　　$\frac{\pi}{2}$ ………答

(3) 解答

1から201までの自然数の中で，素数の２乗であるのは，$2^2, 3^2, 5^2, 7^2, 11^2, 13^2$である。

1から201までの自然数の中で，2^2で割り切れる数は50個ある。同様に3^2で割り切れる数は22個，5^2で割り切れる数は8個，7^2で割り切れる数は4個，11^2で割り切れる数は1個，13^2で割り切れる数は1個ある。

ただし，これら6個の素数の2乗の中の組み合わせで，$2^2\times3^2$, $2^2\times5^2$, $2^2\times7^2\,(=196)$は二重に数えている。それぞれで，1から201までの自然数の中で割り切りれる数は5個，2個，1個であるので，1から201までの自然数の中で素数の2乗で割り切れる個数は，

$$(50+22+8+4+1+1)-5-2-1=78$$

よって，求める個数は，$201-78=123$　　123個………答

$\boxed{2}$ $\boxed{\text{解答}}$

(Ⅰ) 図1のような，2辺を共有する三角形の選び方は7通りである。

(Ⅱ) 図2のような1辺を共有する三角形の選び方は2通りである。

(Ⅲ) 図3のような1辺を共有する三角形の選び方は2通りである。

(Ⅳ) 図4のような1辺を共有する三角形の選び方は2通りである。

(Ⅴ) 図5のような2辺を共有する三角形が1通りに定まる。

(Ⅰ)～(Ⅴ)より，分割方法は $7\times2\times2\times2\times1=56$ 通りある。

ただし，２辺を共有している三角形の選び方により二重に数えているので，

求める分割方法は，$56\div2=28$　　　　28通り………$\boxed{\text{答}}$

図1

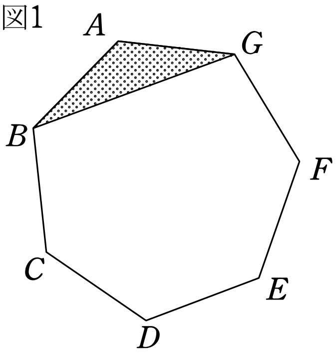


図2

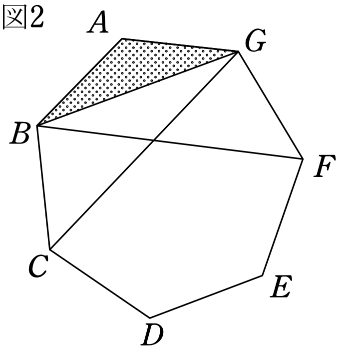


図3

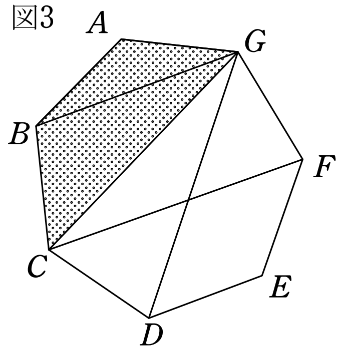


図４

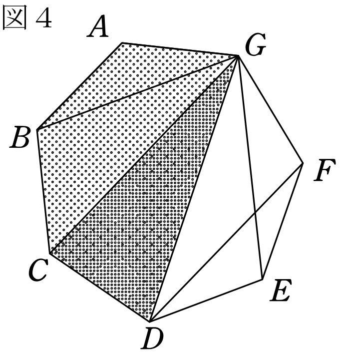
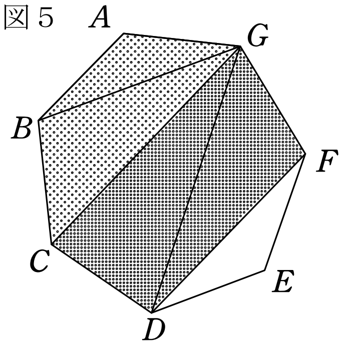


図５



$\boxed{\text{参考}}$ 一般に正n角形について同じ問題を考える。

正 n 角形は $n-2$ 個の三角形に分割され，正 n 角形と2辺を共有している三角形が２個と，残りの $n-4$個の三角形が1辺を共有している。

「2辺を共有している三角形」を一つ固定する。(T_1と呼ぶ)。

この選び方は n通りある。T_1 に隣り合う三角形T_2の選び方は２通りあり，………

T_{n-4} に隣り合う三角形 T_{n-3}の選び方は2通りあり，最後の T_{n-2}は自動的に決まる。

よって，分割方法は $n\times2^{n-4}$ 通りである。

ただし，2辺を共有している三角形の選び方により分割方法を二重に数えているので，求める分割方法は $n\times2^{n-5}$ 通りとなる。

$\boxed{3}$ (1) $\boxed{\text{解答}}$

$4^9-1=(4^3-1)(4^6+4^3+1)$

ここで$4^3=9\times 7+1$であるので,9で割ると1余る。

同様に, $4^6=(4^3)^2=(9\times 7+1)^2$から,9で割ると1余る。

よって,4^6+4^3+1を9で割った余りは$1+1+1=3$であるから,

9で割り切れず, 3で1回だけ割り切れる。

また,$4^3-1=9\times 7$なので3で2回だけ割り切れる。

ゆえに4^9-1は3で最大3回割り切れる。 ………$\boxed{\text{答}}$

(2) $\boxed{\text{解答}}$

$x^n-1=(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+x^{n-3}+\cdot\cdot\cdot+1)$より

$$
\begin{aligned}
4^{2010}-1 &=(4^3)^{670}-1\\
&=(4^3-1)((4^3)^{669}+(4^3)^{668}+\cdot\cdot\cdot+4^3+1)\\
&=3^2\times 7\times((4^3)^{669}+(4^3)^{668}+\cdot\cdot\cdot+4^3+1)
\end{aligned}
$$

4^3は3で割ると1余るので,どのような自然数nに対しても$(4^3)^n$は3で割ると1余る。

したがって,$(4^3)^{669}+(4^3)^{668}+\cdots\cdots\cdots+4^3+1$を3で割った余りは,

$1+1+\cdots\cdots\cdots+1+1=670$である。670は, 3で割り切れないから,

$(4^3)^{669}+(4^3)^{668}+\cdots\cdots\cdots+4^3+1$は3で割り切れない。

よって, $4^{2010}-1$は3で最大2回割り切れる。 ………$\boxed{\text{答}}$

【別解】

$$
\begin{aligned}
4^{2010}-1 &=(3+1)^{2010}-1\\
&=\sum_{n=0}^{2010} {}_{2010}C_n\cdot 3^{2010-n}-1\\
&=(3^3\text{の倍数})+{}_{2010}C_{2008}\cdot 3^2+{}_{2010}C_{2009}\cdot 3\\
&=(3^3\text{の倍数})+335\times 2009\times 3^3+670\cdot 3^2
\end{aligned}
$$

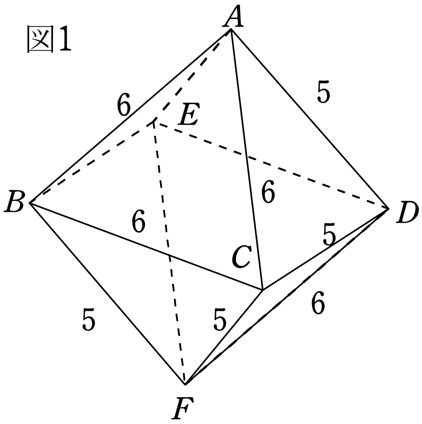
670は3で割り切れないから,$4^{2010}-1$は3で最大2回割り切れる。 ………$\boxed{\text{答}}$

4 解答

この展開図を組み立てると, 図1のようになる。

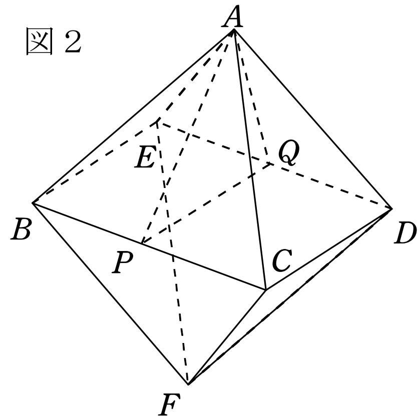
この立体の頂点をそれぞれ図1のようにA～Fとおく。

図1



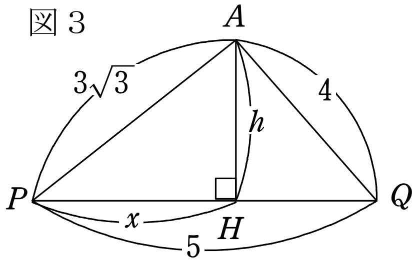
立体の対称性から，4点B, C, D, Eは同一平面上にあり，四角形$BCDE$は長方形になる。また, $A-BCDE$と$F-DEBC$は合同な四角錐となる。(図2)

図２



ここで, 辺BCの中点をP, 辺EDの中点をQとしたとき，$AH=h$, $PH=x$として hを求める。(図３)

図３



$$\begin{cases} x^2+h^2=(3\sqrt{3})^2 \\ (5-x)^2+h^2=4^2 \end{cases}$$

これを解くと ,

$$x=\frac{18}{5}\ ,\ h=\frac{3\sqrt{39}}{5}$$

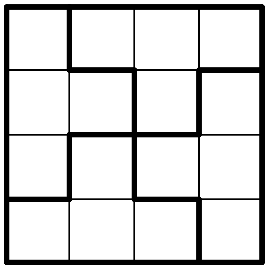
ゆえに求める体積は,

$$\left(\frac{1}{3}\times 30\times\frac{3\sqrt{39}}{5}\right)\times 2=12\sqrt{39}\quad\cdots\cdots\cdots\boxed{答}$$

5 解答

まず, $n=4$のときには右の図 1 のように敷き詰められる。

図 1



次に, nが 4の倍数のとき, つまり$n=4m$（mは自然数）と表せるときに敷き詰められることを示す。

正方形の縦・横の辺をそれぞれ 4 マスずつに分ける(m等分)ように縦・横に直線を引けば, 4 cm×4 cmの正方形が m^2 個できる。

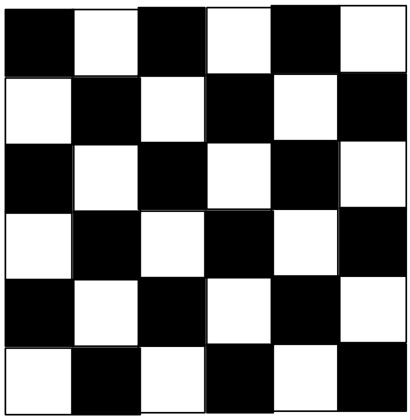
4 cm×4 cmの正方形は敷き詰められるので，全体の $4m$ cm×$4m$ cmの正方形も敷き詰められる。

逆に，与えられたパーツで敷き詰められると仮定すると, nが 4の倍数となることを以下で示す。

このパーツで敷き詰められることから n^2は4の倍数である。よって, nは偶数となる。

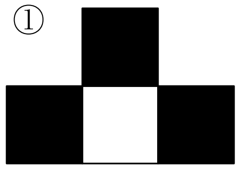
次に，右の図2 のように，正方形のマス目をチェスボードのように塗り分ける。

図2



このとき，正方形 4 個の塗り方は下の図 3 の 2 通りとなる。

図3 ①



②

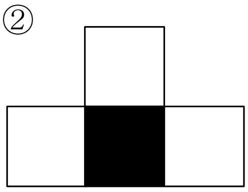


図3の①，②の図形をそれぞれ a個，b個使って塗り分けたとすると，黒のマス目は　$3a+b$ 個

白のマス目は $a+3b$ 個と表せる。nが偶数であるから図2 のように黒のマス目と白のマス目は同じ個数になる。

よって，$3a+b=a+3b$　すなわち，$a=b$となる。

したがって，
$$\begin{aligned} n^2 &= (3a+b)+(a+3b) \\ &= 4(a+b) \\ &= 8a \\ &= 2^2 \cdot 2a \end{aligned}$$

$2a$が平方数になることからaは偶数である。$a=2c$ とおくと

$n^2=2^2 \cdot 2 \cdot 2c = 4^2 c$ の形になることから, nは 4の倍数でなければならない。

以上より，求める条件は，nが 4の倍数である。………答