平成19年度　京都版高校生数学コンテスト　解答例

$\boxed{1}$

（1）　19 以上 2007 以下の自然数の中で，次の条件（ａ）～（ｃ）をすべて満たす数の個数を求めなさい。

（ａ）３で割ると２余る

（ｂ）５で割ると３余る

（ｃ）７で割ると２余る

$\boxed{\text{解答}}$

３で割って２余る数を小さい方から調べると、

２，５，８，11，14，17，20，23，26，29，32，35，38，……

であり、更にこの中で５で割って３余る数は次に示す□で囲んだ数である。

２，５，$\boxed{8}$，11，14，17，20，$\boxed{23}$，26，29，32，35，$\boxed{38}$，……

更にこの中で７で割って２余るのは 23 などである。

ここで、（ａ）と（ｂ）をともに満たす数は、３×５の間隔で出現し、同様の考えにより、（ａ）と（ｂ）と（ｃ）を満たす数は、３×５×７の間隔で出現することがわかる。

よって、求める数ｎは次式で与えられる。

$n=23+105k$　　（kは整数）

いま、条件より

$19\leqq n\leqq 2007$

$19\leqq 23+105k\leqq 2007$

$-4\leqq 105k\leqq 1984$

$-0.03\cdots\leqq k\leqq 18.8\cdots$

これを満たす整数kは、$0,1,2,3,\cdots,18$である。

よって、答えは19個となる。

（答）　19個

（２）　2007^1，2007^2，2007^3，……，2007^{2007}　のうち，一の位が７となる数は全部で何個あるか求めなさい。

$\boxed{\text{解答}}$

2007の累乗において，１の位の数字は７だけに着目すればよいので，

$7^1 = 7$

$7^2 = 49$

$7^3 = **3$

$7^4 = **1$

$7^5 = **7$

$7^6 = **9$

………

となり，１の位の数は　7→9→3→1→7→9→3→1→　　のように規則的に繰り返されていく。

2007^1，2007^2，2007^3，2007^4

2007^5，2007^6，2007^7，2007^8

2007^9，2007^{10}，2007^{11}，2007^{12}

2007^{13}，2007^{14}，2007^{15}，2007^{16}

…………………

2007^{2005}，2007^{2006}，2007^{2007}

のように４項ずつ並べると，１の桁が７となるのは左端の第1列に並ぶので，数列

１，５，…，2005の項数に等しい。

項数を求めるために，それぞれに３を加えると

４，８，…，2008が得られる。

これらは，それぞれ４×１，４×２，４×３，…，４×502

となることから分かるように，これらの総数は502個であることが分かる。

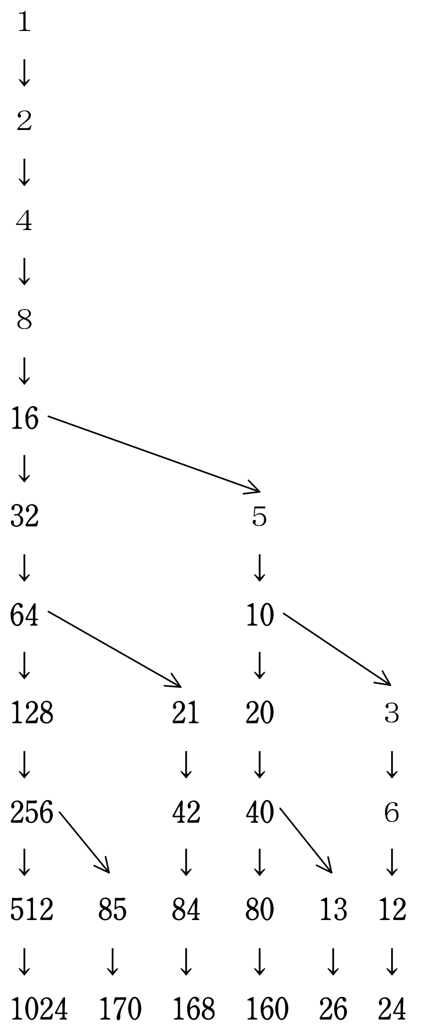
（答）502個

（3）　自然数 n に対して，次のように定めた操作 f を行う。

> 操作 f ：「n が偶数ならば n を２で割る。
> 　　　　　n が奇数ならば n を３倍して１を加える。」

上の操作 f を10回行う。10回目ではじめて１となる自然数をすべて求めなさい。

解答



１から順にさかのぼって考えることで

1024，170，168，160，26，24

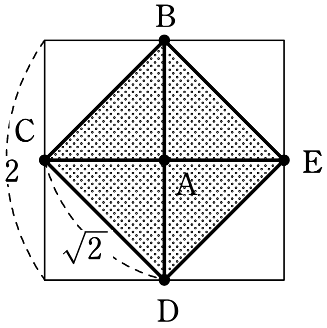
の６個の解を得ることができる。　………………（答）

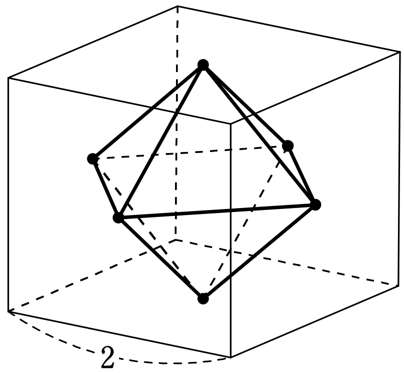
（４）　下の図のように，１辺の長さが２である立方体に内接する正八面体の体積と表面積を求めなさい。（正八面体の頂点は立方体の各面の対角線の交点である。）

解答

真上から見ると

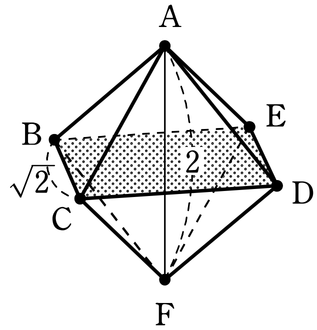
正方形 BCDE の１辺の長さは $\sqrt{2}$





AF=2 であるから　正八面体の体積は

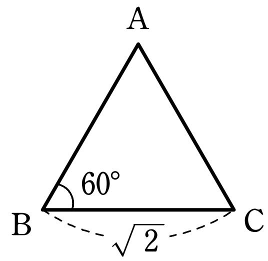
$$\frac{1}{3}\cdot(\sqrt{2})^2\cdot 2=\frac{4}{3}$$ …………（答）



正八面体の各面は１辺の長さが $\sqrt{2}$ の正方形であるから

表面積は

$$8\cdot\frac{1}{2}\cdot(\sqrt{2})^2\cdot\sin 60^\circ=4\sqrt{3}$$ …………（答）

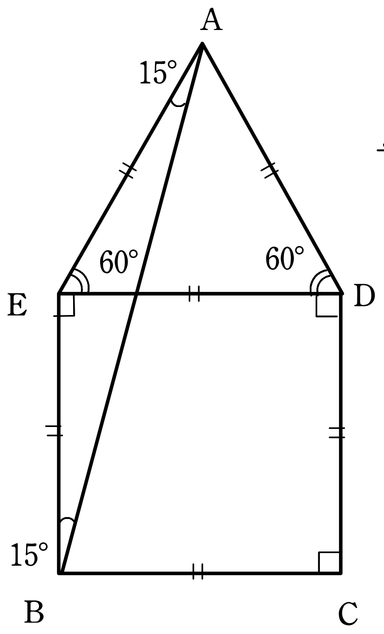


2　四角形ABCDにおいて，３辺BC，CD，DAの長さは等しく，∠C＝90°，∠D＝150°である。

このとき，∠Aと∠Bの大きさを求めなさい。

解答

平面幾何の手法による。補助線の引き方が、ポイント。



左図のように，四角形BCDEが正方形となるように点Eをとる。

∠ADE＝∠ADC（∠D）－∠CDE
＝　150°　－　90°
＝　60°

辺AD　＝　辺DE　より，
△ADEは正三角形である。

∠AEB＝∠AED＋∠DEB
＝　60°　＋　90°
＝150°

△AEBは、辺AE＝辺BEの
二等辺三角形であるから，
∠EAB＝∠EBA＝15°である。

以上より，∠A（＝∠DAB）＝∠DAE－∠BAE
＝　60°　－　15°
＝　45°　………………（答）

∠B（＝∠ABC）＝∠EBC－∠ABE
＝　90°　－　15°
＝　75°　………………（答）

$\boxed{3}$

整数の最大公約数や最小公倍数と同様に，多項式に対しても最大公約数と最小公倍数が定義できる。たとえば，$(x+1)(x-1)$ と $(x+1)(2x+3)$ の最大公約数は $(x+1)$，最小公倍数は $(x+1)(x-1)(2x+3)$ である。

次の $P(x)$ と $Q(x)$ の最大公約数と最小公倍数を求めなさい。

$$P(x)=x^4+4x^3+7x^2+10x+3,\qquad Q(x)=x^4+3x^3+8x^2+9x+9$$

$\boxed{\text{解答}}$　$P(x)$と$Q(x)$の最大公約数を$S(x)$で表わすと

$$P(x)=S(x)\cdot P'(x)$$

$$Q(x)=S(x)\cdot Q'(x)$$

となる。差をとると

$$P(x)-Q(x)=S(x)\cdot\{P'(x)-Q'(x)\}$$

となるので，差を因数分解するとその中に最大公約数が含まれる。

$$\begin{array}{rl} & P(x)=x^4+4x^3+7x^2+10x+3 \\ -) & Q(x)=x^4+3x^3+8x^2+9x+9 \\ \hline & P(x)-Q(x)=\qquad x^3-x^2+x-6 \end{array}$$

この３次式は因数定理により $x-2$ を因数にもつことがわかる。

よって，

$$P(x)-Q(x)=(x-2)(x^2+x+3)$$

ここで、$P(2)\fallingdotseq 0$，$Q(2)\fallingdotseq 0$なので，$(x-2)$ は$P(x)$，$Q(x)$ のどちらの因数でもない。

そこで，$P(x)$，$Q(x)$を x^2+x+3 で割ってみると

$$P(x)=(x^2+x+3)(x^2+3x+1)$$

$$Q(x)=(x^2+x+3)(x^2+2x+3)$$

であることがわかる。

よって，

$P(x)$，$Q(x)$の最大公約数は (x^2+x+3)

$P(x)$，$Q(x)$の最小公倍数は $(x^2+x+3)(x^2+3x+1)(x^2+2x+3)$ ………（答）

$\boxed{\text{別解}}$

$P(x)$，$Q(x)$ の最大公約数をＧＣＭ（$P(x)$，$Q(x)$）で表わすこととすると，ユークリッドの互除法の手法により

ＧＣＭ（$P(x)$，$Q(x)$）

＝ＧＣＭ（$P(x)$，x^3-x^2+x-6）

＝ＧＣＭ（x^3-x^2+x-6，$11x^2+11x+33$）

＝x^2+x+3

ここで，$P(x)$，$Q(x)$ を x^2+x+3 で割ってみると

$$P(x)=(x^2+x+3)(x^2+3x+1)$$

$$Q(x)=(x^2+x+3)(x^2+2x+3)$$

となり，確かに

$P(x)$，$Q(x)$の最大公約数は (x^2+x+3)

$P(x)$，$Q(x)$の最小公倍数は $(x^2+x+3)(x^2+3x+1)(x^2+2x+3)$ ………（答）

$\boxed{4}$

４個のさいころを投げて，出た目の数の和を４で割ったときの余りを考える。余りがいくらになるときが最も確率が大きいか求めなさい。

解答

４個のさいころの目の出方は，全部で

$6^4=1296$ 通り

右の表より，２個のさいころで考えると

余りが０になるのは９通り
余りが１になるのは８通り
余りが２になるのは９通り
余りが３になるのは10通り

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	0	1	2	3
2	3	0	1	2	3	0
3	0	1	2	3	0	1
4	1	2	3	0	1	2
5	2	3	0	1	2	3
6	3	0	1	2	3	0

である。４個のときは，さいころを２個ずつに分けて考えると，
余りが０になるのは

一方の２個で余りが０でかつ他方の２個で余りが０
一方の２個で余りが１でかつ他方の２個で余りが３
一方の２個で余りが２でかつ他方の２個で余りが２
一方の２個で余りが３でかつ他方の２個で余りが１

のときであるので，余りが０になるのは

$9\times9+8\times10+9\times9+10\times8=322$ 通りとなり，確率は $\dfrac{322}{1296}$ である。

同様にして，
余りが１になるのは

$9\times8+8\times9+9\times10+10\times9=324$ 通りとなり，確率は $\dfrac{324}{1296}$

余りが２になるのは

$9\times9+8\times8+9\times9+10\times10=326$ 通りとなり，確率は $\dfrac{326}{1296}$

余りが３になるのは

$9\times10+8\times9+9\times8+10\times9=324$ 通りとなり，確率は $\dfrac{324}{1296}$

であるから，余りが２になるときが最も確率が高い。

$\boxed{5}$

右の図１は，１辺の長さが２の正二十面体である。

この立体において，頂点Aから他のすべての頂点までの距離を，それぞれ２乗した総和を求めなさい。

ここで，頂点間の距離とは，２つの頂点間の最短距離とする。たとえば，右下の図２のような立方体 ABCD－EFGHにおいて，頂点Aから頂点Gまでの距離は，線分AGの長さのことである。

図１

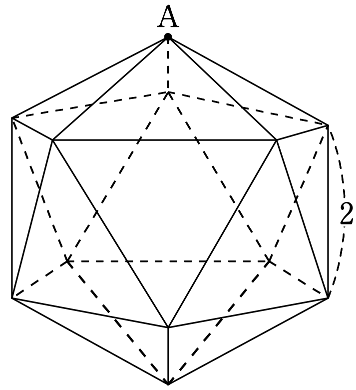
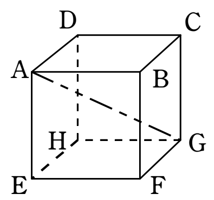


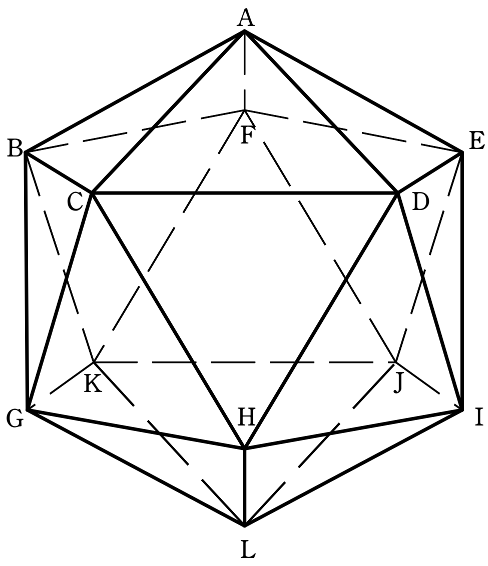
図２



解答

各頂点を図のようにＡ～Ｌとし，

頂点Ａから各頂点までの距離を求める。



正三角形の１辺であるので，

AB＝AC＝AD＝AE＝AF＝2

正五角形 ABGHD において

対角線 AG，BD の交点を M とする

△AGH はAG＝AH の二等辺三角形で

BD∥GH より　∠AGH＝∠GMB

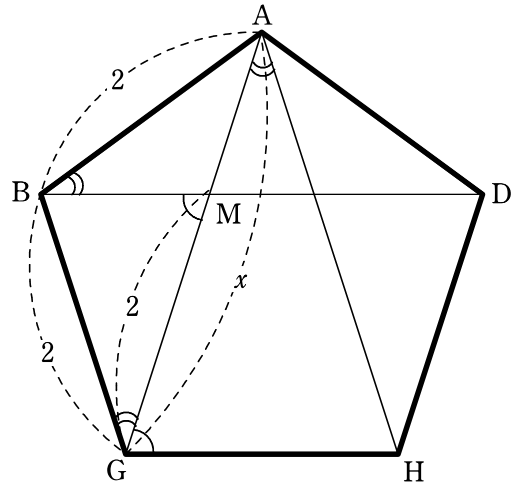
BG∥AH より　∠GAH＝∠BGM

２角が等しいので　△AGH∽△GBM

よって　△GBM は二等辺三角形であり

GB＝GM＝2

対角線 AG$=x$ とおくと



△MAB は二等辺三角形なので

$$MA=MB=x-2$$

ここで　△MAB∽△BGA なので

$$MA:AB=BG:GA$$

よって　$(x-2):2=2:x$

$$x(x-2)=2^2$$

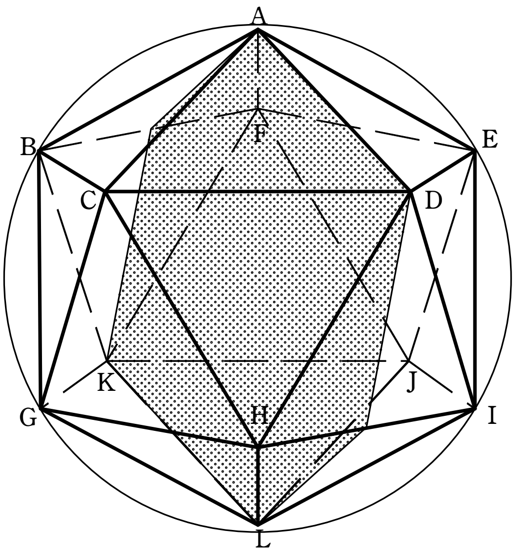
$$x^2-2x-4=0$$

$$x=1\pm\sqrt{5}$$

$x>0$ より　　　$x=1+\sqrt{5}$

よって　　　$AG=1+\sqrt{5}$

したがって，$AG=AH=AI=AJ=AK=1+\sqrt{5}$

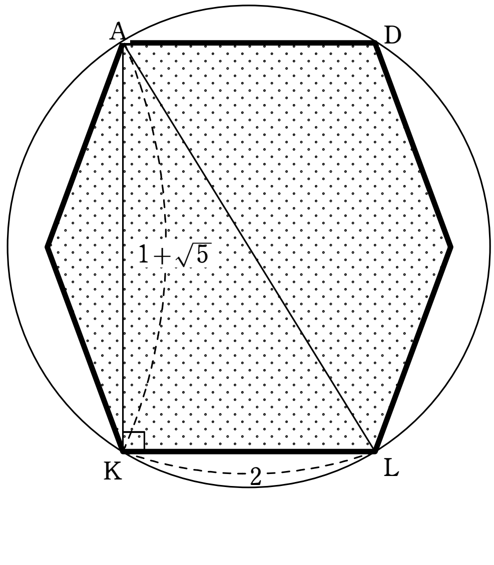


次に，この正二十面体は AL を直径とする球に内接しているので，3 点 A，K，L を通る平面でこの球を切ると，
断面は AL を直径とする円となる。
点 K はこの円周上にあるので，

$$\angle AKL=90°$$

すなわち　$AK\perp KL$　であるから

$$AL^2=AK^2+KL^2$$
$$=(1+\sqrt{5})^2+2^2$$
$$=1+2\sqrt{5}+5+4=10+2\sqrt{5}$$



以上より　頂点 A から各頂点までの距離の平方の和は

$$5\times AB^2+5\times AG^2+AL^2$$
$$=5\times2^2+5\times(1+\sqrt{5})^2+(10+2\sqrt{5})$$
$$=20+30+10\sqrt{5}+10+2\sqrt{5}$$
$$=60+12\sqrt{5}$$　………………（答）