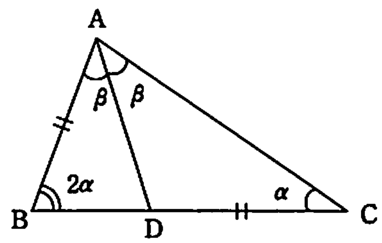
第3回　数学オリンピック道場

1．JMO　2001　予選$\boxed{9}$

$\angle$ABC＝2$\angle$ACBとなる三角形ABCにおいて，$\angle$BACの二等分線と辺BCとの交点をDとする。AB＝CDのとき，$\angle$BACは何度（°）か。ただし，線分XYの長さをXYで表す。

$\boxed{解答}$



$\angle$C ＝αとおくと，$\angle$ABC＝2α

$\angle$BAC＝2βとおくと，$\triangle$ABCにおいて，

$3\alpha+2\beta=180°$ ………… ①

$\angle$Aの二等分線が辺BCと交わる点をD，

$\angle$Bの二等分線が$\triangle$ABCの外接円と交わる点をEとする。

このとき，同じ円周の上に立つ円周角は等しいので，各角度は右図のようになる。ここで，底角αが等しいことから，

$\triangle$ABE，$\triangle$EACはどちらも二等辺三角形である。

$\therefore$　AB＝AE＝EC＝DC ………… ②（条件よりAB＝DC）

また，$\angle$AEB＝$\angle$CBE＝αから，AE$/\!/$DC ………… ③

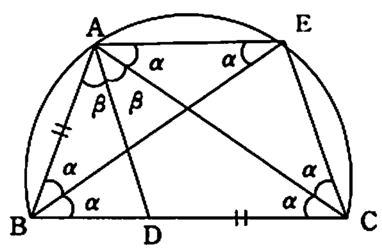
②，③から，四角形AECDは，平行四辺形である。

$\varnothing$AECDにおいて，$\angle$DAE＝$\angle$DCE ………… ④

$\therefore$　$\beta+\alpha=2\alpha$　　$\therefore$　$\alpha=\beta$ ………… ⑤

①と⑤から，$\alpha=\beta=36°$

よって，求める$\angle$BAC＝$2\beta=72°$ …………（答）



２．ＪＭＯ　２００６　予選$\boxed{9}$

ＢＣ=5，ＣＡ=７，ＡＢ=8である三角形ＡＢＣの内部に点Ｏをとる。三角形ＯＢＣの外接円，三角形ＯＣＡの外接円，三角形ＯＡＢの外接円の半径がすべて等しいとき，その等しい半径を求めよ。

$\boxed{\text{解答}}$

三角形ＯＢＣの外接円，三角形ＯＣＡの外接円，三角形ＯＡＢの外接円の中心をそれぞれＰ，Ｑ，Ｒとする。

条件より　ＰＯ＝ＰＢ＝ＲＯ＝ＲＢであるから四角形ＯＲＢＰは，ひし形となり，

ＯＲ＝ＰＢ，ＯＲ//ＰＢ　………　①

が成り立つ。

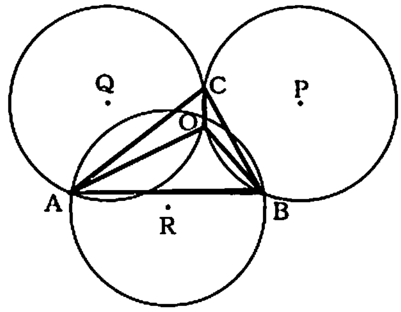
同様にして，四角形ＯＱＡＲもひし形より

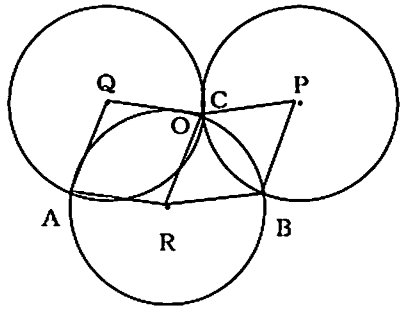
ＯＲ＝ＱＡ，ＯＲ//ＱＡ　………　②

①，②より，四角形ＡＢＰＱは平行四辺形となり，

ＡＢ＝ＱＰ

が成り立つ。





同様にして，ＢＣ＝ＲＱ，ＣＡ＝ＰＲとなるから，

△ＡＢＣ≡△ＰＱＲ　である。

条件より，ＯＰ＝ＯＱ＝ＯＲであるから，

Ｏは△ＰＱＲの外心となる。

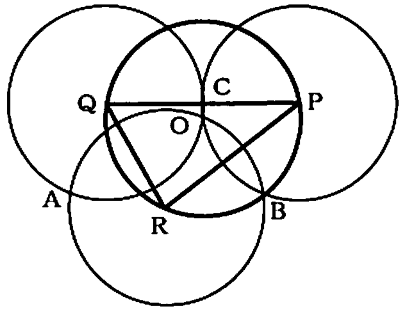
余弦定理より，

$$cos\angle PQR=\frac{5^2+8^2-7^2}{2\times5\times8}=\frac{1}{2}$$　より　∠ＰＱＲ=60°

正弦定理を用いて，

$$2OR=\frac{PR}{sin60^\circ}=7\times\frac{2}{\sqrt{3}}$$

ゆえに，$OR=\frac{7}{\sqrt{3}}$



第３回　数学オリンピック道場

３．ＪＭＯ　１９９１　予選$\boxed{5}$

８個の点$(x,\ y,\ z)$　(x, y, zは0または6) を頂点とする立方体の中に点$\mathrm{P}(e,\ \pi,\ \sqrt{5})$をとる。立方体の各面に関するＰの対称点（6個）を頂点とする多面体と元の立方体との共通部分の体積を求めよ。

$\boxed{\text{解答}}$

実は点Pは立方体の内部の点であれば，どこであっても求める体積は変わらない．以下，そのことも含めて解答を示す．

立方体の内部にある任意の点を$\mathrm{P}(a,\ b,\ c)$とおく．$(0<a, b, c<6)$ 立方体の各面に関するPの対称点は，

$(-a, b, c)$，$(a, -b, c)$，$(a, b, -c)$，$(12-a, b, c)$，$(a, 12-b, c)$，$(a, b, 12-c)$

である．これらの対称点で作られる八面体の各辺は，もとの立方体の辺と交わる．例えば，

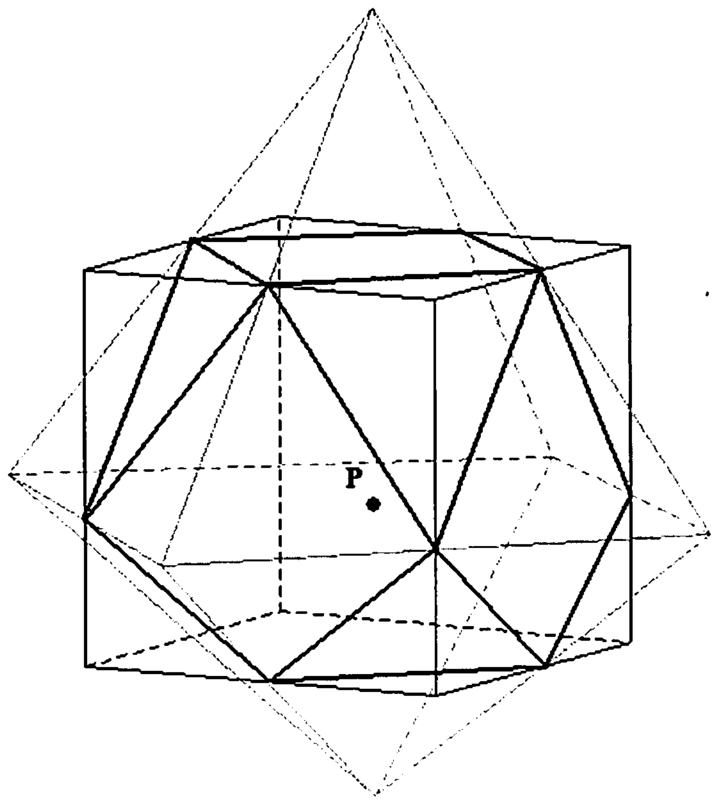
$(-a, b, c)$，$(a, -b, c)$ を結ぶ辺は立方体の辺と点 $(0, 0, c)$ で交わる．これにより，共通部分は，もとの立方体の8つの角から三角錐を切り取った図形となる．

三角錐の体積の合計は

$$\frac{1}{6}abc+\frac{1}{6}ab(6-c)+\frac{1}{6}a(6-b)c+\frac{1}{6}a(6-b)(6-c)+\frac{1}{6}(6-a)bc+\frac{1}{6}(6-a)b(6-c)$$

$$+\frac{1}{6}(6-a)(6-b)c+\frac{1}{6}(6-a)(6-b)(6-c)=\frac{1}{6}\{a+(6-a)\}\{b+(6-b)\}\{c+(6-c)\}=\frac{1}{6}\cdot 6^3=6^2$$

であるので，求める共通部分の体積は　$6^3-6^2=180$



第3回　数学オリンピック道場

4．オリンピアン vol.8 より

円周上に20個の互いに異なる点がある。次の条件(ⅰ)及び(ⅱ)を満たすように各頂点間を辺で結ぶとき，辺の本数の最大値を求めよ。

(ⅰ) 各頂点から出ている辺の数は4の倍数

(ⅱ) 頂点間を結ぶ辺により，三角形ができてはならない

解答 円周上の20個の点を $P_1, P_2, \cdots, P_{20}$ とする。頂点 P_i を端点とする辺の本数を d_i とする。

このとき，辺の総本数は $N=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{20} d_i$ 本と表すことができる。

条件(ⅰ)から，d_i は 0, 4, 8, 12, 16 のいずれかに一致する。必要ならば点の名前を付け替えて $d_1 \geqq d_2 \geqq \cdots \geqq d_{20}$ と仮定してよい。

まず，$d_9 \leqq 8$ を示す．もし $d_9 \geqq 12$ と仮定すると，ある $i \in \{1, 2, \cdots, 8\}$ があって，P_i と P_9 は辺で結ばれている。ところが，P_i と P_9 を端点とする辺はともに12本以上あるので，この2点を頂点とする三角形が存在する。これは条件(ⅱ)に反するので，$d_9 \leqq 8$ でなければならない。

以下，$d_1 \leqq 12$ と $d_1 = 16$ の場合に分けて，辺の本数 N の上限を調べる。

・$d_1 \leqq 12$ の場合

このとき，$12 \geqq d_1 \geqq d_2 \geqq \cdots \geqq d_8$，$8 \geqq d_9 \geqq d_{10} \geqq \cdots \geqq d_{20}$ より，

$$N=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{20} d_i \leqq \frac{1}{2}(12\cdot 8+8\cdot 12)=96$$

・$d_1 = 16$ の場合

このとき，条件(ⅱ)を満たすためには，点 P_1 と辺で結ばれる任意の頂点 P_i に対して，P_i から引くことのできる辺の本数は4本になる．実際，それ以上，辺を引こうとすると三角形ができてしまう。

したがって，特に，$4 \geqq d_5 \geqq d_6 \geqq \cdots \geqq d_{20}$ となる．よって，

$$N=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{20} d_i \leqq \frac{1}{2}(16\cdot 4+4\cdot 16)=64$$

以上より，$N \leqq 96$ である。ここで，任意の $i \in \{1, 2, \cdots, 8\}$ と任意の $j \in \{9, \cdot 10, \cdots, 20\}$ に対して P_i と P_j を結べば辺の本数は96本となり，条件(i), (ii)を共に満たす．よって，求める最大値は96である．