第２回　数学オリンピック道場

１．JMO　１９９２ $\boxed{7}$

x，yは正整数で，x^4+y^4 を $x+y$ で割った商は97である。余りを求めよ。

$\boxed{\text{解答}}$ $x^4+y^4=97(x+y)+r \qquad 0\leqq r<x+y$

を変形して $\dfrac{x^4+y^4}{x+y}=97+\dfrac{r}{x+y}$

ここで，一般性を失うことなしに $x\leqq y$ と仮定して，不等式

$98>\dfrac{x^4+y^4}{x+y}>\dfrac{y^4}{x+y}\geqq\dfrac{y^3}{2} \quad , \qquad 97\leqq\dfrac{x^4+y^4}{x+y}<\dfrac{xy^3+y^4}{x+y}=y^3$

を満たす整数 y を求めると，$y=5$

$(x,\ y)=(1,5)$，$(2,5)$，$(3,5)$，$(4,5)$，$(5,5)$

のうち，題意を満たすものは，$(4,5)$ であり，このときの余りは８である。

２．JMO　１９９６　$\boxed{7}$

次の方程式の正の整数解$(a\ ,\ b)$をすべて求めよ。

$$LCM(a\,,b)+GCM(a\,,b)+a+b=ab$$

ただし，$a\geqq b$ とする。また，$LCM(a\,,b)$，$GCM(a\,,b)$ は各々 a，b の最小公倍数，最大公約数をあらわす。

$\boxed{\text{解答}}$ $GCM(a\,,b)=g$ とし，$a=ga'$，$b=gb'$ とすると

$GCM(a'\,,b')=1$　$LCM(a\,,b)=ga'b'$ である。

よって，条件式は

$$ga'b'+g+ga'+gb'=g^2a'b'$$

$$1+a'+b'=(g-1)a'b' \quad \cdots\cdots\cdots (1)$$

となる。

(1)より $g\geqq 2$ である。また

$$g-1=\frac{a'+b'+1}{a'b'}=\frac{1}{a'}+\frac{1}{b'}+\frac{1}{a'b'}\leqq 3$$

より $g\leqq 4$ である。さらに仮定の $a\geqq b$ より $a'\geqq b'$ である。

$g=2$ とすると(4)は $1+a'+b'=a'b'$　$(a'-1)(b'-1)=2$

$a'\geqq b'$ より $(a'\,,\ b')=(3\,,2)$　　$\therefore$　$(a\ ,\ b)=(6\,,4)$

$g=3$ とすると(4)より $(2a'-1)(2b'-1)=3$

$a'\geqq b'$ より $(a'\,,\ b')=(2\,,1)$　　$\therefore$　$(a\ ,\ b)=(6\,,3)$

$g=4$ とすると(4)より $(3a'-1)(3b'-1)=4$

$a'\geqq b'$ より $(a'\,,\ b')=(1\,,1)$　　$\therefore$　$(a\ ,\ b)=(4\,,4)$

以上により　$(a\ ,\ b)=(6\,,4)$，$(6\,,3)$，$(4\,,4)$

３．JMO　１９９６ $\boxed{6}$

Nは正整数全体の集合とし　$f:\mathrm{N}\to\mathrm{N}$　は以下の条件(1),(2),(3)をみたす関数とする。

(1)　$f(xy)=f(x)+f(y)-1$　が任意の正整数 x,y について成り立つ。

(2)　$f(x)=1$ をみたす x は有限個しか存在しない。

(3)　$f(30)=4$ である。

このとき　$f(14400)$ の値を求めよ。

$\boxed{解答}$

(1)より($f(1)=f(1)+f(1)-1$，∴ $f(1)=1$ である) $n\geqq 2$ のとき $f(n)=1$ ならば，
任意の正整数 p に対して

$$f(n^p)=\underbrace{f(n)+\cdots+f(n)}_{p\ \ times}-(p-1)=1$$

となり(2)と矛盾するので，$n\geqq 2$ のとき　　$f(n)\geqq 2$ ---------------- (4)

(3)より　　$f(30)=f(2)+f(3)+f(5)-2=4$

よって　　$f(2)+f(3)+f(5)=6$

(4)より　　$f(2)=f(3)=f(5)=2$ ---------------------------- (5)

$14400=30^2\times 2^4$ なので，(5)，(1)より

$$f(30^2)=2f(30)-1=7\quad f(2^4)=4f(2)-3=5$$

よって　　$f(14400)=7+5-1=11$

第２回　数学オリンピック道場

４．１９８５　ソ連国内予選

整数$1, 2, \cdots\cdots, 2n-1, 2n$ をn 個ずつの数を含む2つのグループに分けてある。
第１のグループは大きい順に並べて

$$a_1 > a_2 > \cdot\cdot\cdot\cdot > a_n$$

とし，第２グループは小さい順に並べて，

$$b_1 < b_2 < \cdot\cdot\cdot\cdot < b_n$$

とする。このときいかなる分け方に対しても常に

$$|a_1-b_1|+|a_2-b_2|+\cdot\cdot\cdot\cdot+|a_n-b_n|=n^2$$

となることを示せ。

解答　$A=\{a_1, a_2, \cdot\cdot\cdot, a_n\}$ とする。Aの元でn より大きいものの個数をr 個とすると

$$a_1 > a_2 > \cdot\cdot\cdot > a_r > n \geqq a_{r+1} > \cdot\cdot\cdot > a_n$$

である。このとき，$B=\{b_1, b_2, \cdot\cdot\cdot, b_n\}$ の元でn より大きいのは$n-r$ 個あるので，

$$b_1 < b_2 < \cdot\cdot\cdot < b_r \leqq n < b_{r+1} < \cdot\cdot\cdot < b_n$$

となる。したがって

$$|a_1-b_1|+|a_2-b_2|+\cdot\cdot\cdot\cdot+|a_n-b_n|$$
$$=(a_1-b_1)+(a_2-b_2)+\cdot\cdot\cdot+(a_r-b_r)+(b_{r+1}-a_{r+1})+\cdot\cdot\cdot+(b_n-a_n)$$

が成立する。

ところが

$$\{a_1, a_2, \cdot\cdot\cdot, a_r, b_{r+1}, \cdot\cdot\cdot, b_n\}=\{n+1, n+2, \cdot\cdot\cdot, 2n\}$$
$$\{b_1, b_2, \cdot\cdot\cdot, b_r, a_{r+1}, \cdot\cdot\cdot, a_n\}=\{1, 2, \cdot\cdot\cdot, n\}$$

であるから，

$$(a_1-b_1)+(a_2-b_2)+\cdot\cdot\cdot+(a_r-b_r)+(b_{r+1}-a_{r+1})+\cdot\cdot\cdot+(b_n-a_n)$$
$$=(n+1)+(n+2)+\cdot\cdot\cdot+2n-(1+2\cdot\cdot\cdot+n)=n^2$$