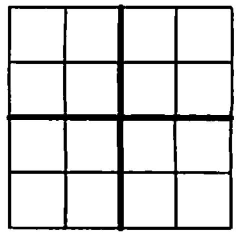
第１回　数学オリンピック道場

１．JMO　２００１　予選$\boxed{7}$

４×４のマス目をつくり，１から４までの数字をそれぞれ４つずつ書き込む。ただし、以下の３つの条件をみたすとする。

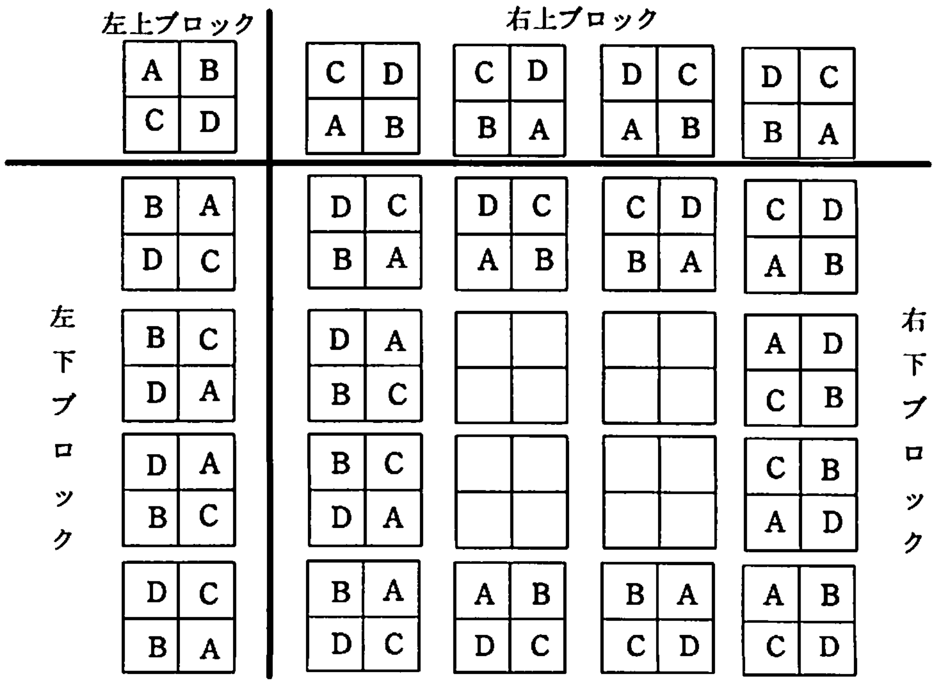


（ｉ）各行には1，2，3，4が１回ずつあらわれる。
（ⅱ）各列には1，2，3，4が１回ずつあらわれる。
（ⅲ）全体を右図のように太線で４つの部分に分けたとき，
　　各部分に1，2，3，4が１回ずつあらわれる。

このような図の書き込み方は何通りあるか。

$\boxed{\text{解答}}$

まず，数字の1，2，3，4は、区別できれば何でもいいので、数字に特別の意味はない。
左上ブロックは、４つの数字が並ぶ。その順列は４！＝24通りである。
そのひとつのパターンをA、B、C、Dであらわすこととする。
このとき、右上ブロックの１行目は、ＣＤかＤＣのどちらか、右上ブロックの２行目は、ＡＢかＢＡのどちらかとなる。
また、左下ブロックの１列目は、ＢＤかＤＢのどちらか、左下ブロックの２列目は、ＡＣかＣＡのどちらかとなる。
よって、右下ブロックの変化は下図のように、４×４＝16通りとなる。
ただし、実際には下図の空白のところ４つは題意を満たすことはできない。
まとめると、場合の数の総数は、２４×（１６－４）＝２８８　通りとなる。



第１回　数学オリンピック道場

２．

ロトくじには，下の図のように１から90までの数字が並んでいる。この中から隣り合う数字がないように５個の数字を選ぶ選び方は何通りあるか。ただし，隣り合う数字がないのは，選んだ数字の差が１にならないように選ぶものとする。

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36
37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54
55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72
73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90

解答

選んだ数字を○，選ばなかった数字を×と考えると，

例えば{1, 3, 4, 6, 12}と選んだ場合これを○×を用いて一列に並べて表すと次のようになる。

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14　　　　　　　　　　89 90

○×○○×○××××× ○××……………………………××

また，{2, 5, 8, 11, 13}のように隣り合わないように選んだ場合を同様に表すと，

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14　　　　　　　　　　89 90

×○××○××○×× ○×○× ……………………………××

つまり１から90までの90個の数字から隣り合わないような５個の数字の選び方は，

85個の×を一列に並べ，その両端と×の間の86ヵ所から５ヵ所選んで隣り合わないように○を並べる並べ方に等しい。

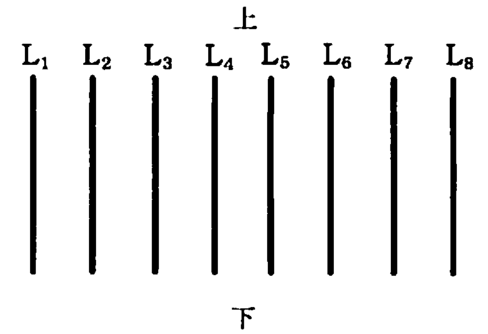
ゆえに，求める場合の数は

$$ {}_{86}C_5=\frac{86\times85\times84\times83\times82}{5\times4\times3\times2\times1}=3482630 \text{ 通り} $$

第１回　数学オリンピック道場

３．

L_1 から L_8 までの８本のひもが図のように平行に並べてある。上端と上端を適当に２つずつ４組に結び，同様に下端と下端も２つずつ４組に結ぶ。このとき，結んだひもが大きな１つの輪になる確率を求めよ。



解答

（ｉ） L_1 の上端はどの上端と結んでも良いので，結ぶ方は７通りとなるから確率は，$\frac{7}{7}=1$

（ii） L_1 の上端と L_4 の上端を結ぶとする。L_4 の下端と L_1 の下端を結ぶと大きな円にならないので，L_4 の下端と結べるのは，L_1 の下端以外の６通りとなるから確率は，$\frac{6}{7}$

（iii） L_4 の下端と L_7 の下端を結ぶとする。L_7 の上端は残りのどの上端と結んでも良いので，結び方は５通りとなるから確率は、$\frac{5}{5}=1$

（iv） L_4 の上端と L_2 の上端を結んだとする。L_2 の下端と L_1 の下端を結ぶと大きな円にならないので，L_2 の下端と結べるのは，L_1 の下端以外の４通りとなるから確率は，$\frac{4}{5}$

（ｖ） L_2 の下端と L_8 の下端を結ぶとする。L_8 の上端は残りのどの上端と結んでも良いので，結び方は３通りとなるから確率は、$\frac{3}{3}=1$

（vi） L_8 の上端と L_3 の上端を結んだとする。L_3 の下端と L_1 の下端を結ぶと大きな円にならないので，L_3 の下端と結べるのは，L_1 の下端以外の２通りとなるから確率は，$\frac{2}{3}$

（vii） L_3 の下端と L_5 の下端を結ぶとする。L_5 の上端は残りの L_6 の上端と結ぶしかない。さらに L_6 の下端は残っている L_1 の下端としか結べないので，確率は１

よって，求める確率は，$\frac{7}{7}\times\frac{6}{7}\times\frac{5}{5}\times\frac{4}{5}\times\frac{3}{3}\times\frac{2}{3}\times 1=\frac{16}{35}$　となる。

第１回　数学オリンピック道場

４．JMO　１９９４　予選$\boxed{10}$

$A=\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ とするとき，次の条件 (1)，(2) を満たす A の部分集合 S は何個あるか。

(1)　S の要素は５個。

(2)　S から相異なる２つの要素を取り出して和を作り，その一の位を考えると，0 から9 までの数字がすべて現れる。

解答

集合 A には，偶数，奇数がそれぞれ５個ずつある。５個の要素からなる部分集合 S の要素の偶数，奇数の個数と S の相異なる２数の和の偶数，奇数を調べてみると次のようになる。

S	奇数の個数	5	4	3	2	1	0
	偶数の個数	0	1	2	3	4	5
S の２数の和	奇数の個数	0	4	6	6	4	0
	偶数の個数	10	6	4	4	6	10

どの S でも２数の和の偶数，奇数の個数はそれぞれ5 個とならないので，条件を満たす部分集合 S は存在しない。

ゆえに，０個である。