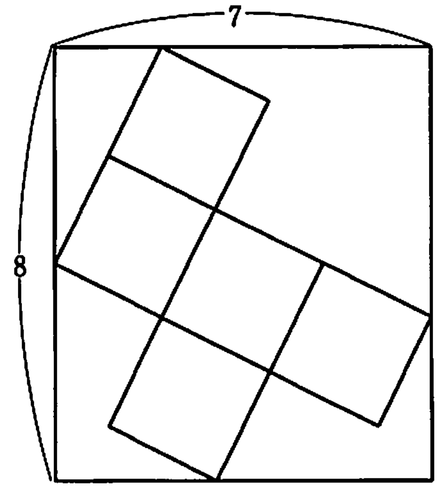
京都数学オリンピック道場　第３回

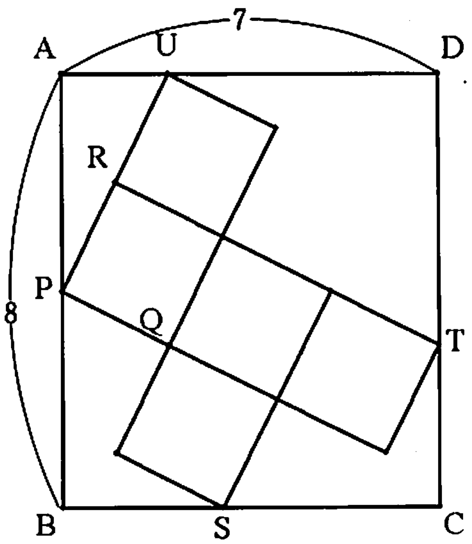
１．　『2001年　日本数学オリンピック　問題番号２』

縦の長さが８，横の長さが７の長方形の中に，５つの合同な正方形が下図のように詰め込まれている．正方形の１辺の長さを求めよ．



解答

下図のように頂点に名前をつける．



Bを原点，$\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BA}$をそれぞれ x 軸，y 軸とする座標をとり，$\overrightarrow{PQ}=(a,-b)$とおくと，$\overrightarrow{PR}=(b,a)$となる．$\overrightarrow{PT}=3\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{PR}$ のx成分，$\overrightarrow{SU}=-2\overrightarrow{PQ}+3\overrightarrow{PR}$の$y$成分を比較すると，連立方程式

$7=3a+b$，$8=2b+3a$

が得られる．これを解いて，$(a,b)=(2,1)$,

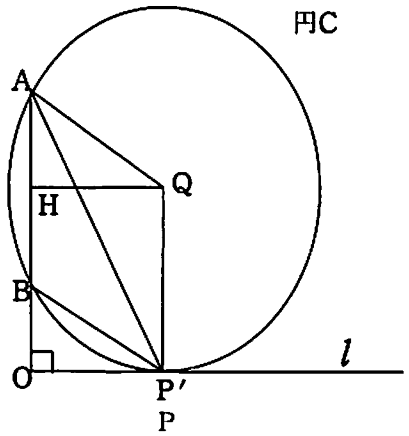
よって，正方形の１辺の長さは$\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{5}$… (答)

２．　『2005年　日本数学オリンピック　問題番号３』

$OA=2$, $OP=a$, $\angle AOP=90°$ なる直角三角形AOPの辺OAの中点を点Bとする．

このとき，$\angle APB$を最大にするような a の値を求めよ．

解答



PはOAに垂直でOを通る直線 l 上にある。2点A，Bを通り，直線 l に接するような円Cを考える。Pが C と l の接点P′以外の l 上の点であるとき、Pは円Cの外側にあり，$\angle APB$は円Cにおける円周角$\angle AP'B$より小さい。

よって，$P=P'$が$\angle APB$を最大にするPである。

$P=P'$ のとき，円Cの中心をQ，QからOAに下ろした垂線の足をHとすると，

$QA=QP=\frac{3}{4}\times OA=\frac{3}{2}$，$HA=\frac{1}{4}\times OA=\frac{1}{2}$より、

$a=OP=QH=\sqrt{QA^2-HA^2}=\sqrt{2}$　… (答)

別解

$\alpha=\angle APO$，$\beta=\angle BPO$とおくと，$\tan\alpha=\frac{2}{a}$，$\tan\beta=\frac{1}{a}$であるから，

$$\tan\angle APB=\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\frac{\frac{2}{a}-\frac{1}{a}}{1+\frac{2}{a}\cdot\frac{1}{a}}=\frac{\frac{1}{a}}{1+\frac{2}{a^2}}=\frac{1}{a+\frac{2}{a}}$$

相加平均と相乗平均の不等式から，$a+\frac{2}{a}\geqq 2\sqrt{2}$ であり，

等号が成り立つのは$a=\sqrt{2}$ $(a>0)$のときである．

したがって，$\tan\angle APB$は $a=\sqrt{2}$のとき最大になる．

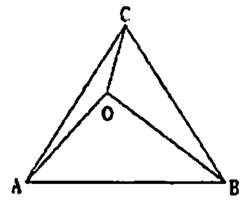
$0°<\angle APB<90°$であるから，tanが増加関数であることにより，

$\angle APB$も$a=\sqrt{2}$のとき最大になる．… (答)

3．　右図の$\triangle ABC$において，

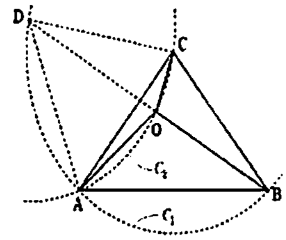
$\angle OAB=40^\circ$，$\angle OAC=10^\circ$，$\angle OBA=30^\circ$，$\angle OBC=20^\circ$

である．$\angle BOC$の大きさを求めよ．



解答

点Cを中心として，2点A，Bを通る円をC_1とする．半直線BOと円C_1の交点をDとする．このとき，弧ADに対する円周角の定理から$\angle ACD=60^\circ$なので，$\triangle ACD$は正三角形である．したがって，点Dを中心として，2点A，Cを通る円があり，これをC_2とする．直線BDと円C_2の交点をO'とする．



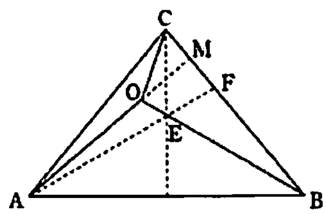
$\triangle BCD$は二等辺三角形であるから$\angle CDO'=20^\circ$である．弧$O'C$に対する円周角の定理から，$\angle CAO'=10^\circ$である．一方，仮定より$\angle CAO=10^\circ$であり，OもO'も直線BD上の点であるから，OとO′は一致する．

したがって，$\triangle DOC$は二等辺三角形とわかり，

$\angle DOC=\frac{1}{2}(180^\circ-\angle CDO)=80^\circ$　　　$\therefore \angle BOC=100^\circ$…（答）

別解1

頂点Cから辺ABへ下ろした垂線と線分OBとの交点をEとする．このとき，$\triangle AEB$は二等辺三角形になり，$\angle EAB=30^\circ$……①，$\angle OEC=60^\circ$……②である．直線AEと辺BCとの交点をFとする．さらに，直線AOと辺BCとの交点をMとする．①より$\angle FAM=10^\circ$……③であり，直線OAは$\angle CAE$の二等分線である．



$\angle ACM=80^\circ$，$\angle CAM=10^\circ$より$\angle AMC=\angle AMF=90^\circ$であるから，③と合わせて，$\triangle AFC$は二等辺三角形になる．したがって，$\angle AFC=80^\circ$であり，$\angle OEA=\angle FEB=\angle EFC-\angle EBF=60^\circ$….④

②，④より直線OEは$\angle AEC$の二等分線である．したがって，点Oは$\triangle AEC$の内心とわかり，$\angle OCE=20^\circ$である．これと②より，$\angle BOC=\angle EOC=100^\circ$…（答）

別解2

まず，次の等式が成り立つことに注意しよう：

$\sin\angle OAB\cdot\sin\angle OBC\cdot\sin\angle OCA=\sin\angle OBA\cdot\sin\angle OCB\cdot\sin\angle OAC$……①

①を示すのは容易である．例えば点Oから辺AB，BC，CAに垂線を下ろす．

さて，①に$\angle OAB=40^\circ$，$\angle OBC=20^\circ$，$\angle OBA=30^\circ$，$\angle OAC=10^\circ$を代入して，$\angle OCA=x^\circ$，$\angle OCB=80^\circ-x^\circ$とおくと，

$$\sin 40^\circ\cdot\sin 20^\circ\cdot\sin x=\sin 30^\circ\cdot\sin(80^\circ-x)\cdot\sin 10^\circ$$

$$\therefore 2\sin 10^\circ\cos 10^\circ\cdot\sin 40^\circ\cdot\sin x=\frac{1}{2}\sin 10^\circ\cdot\sin(80^\circ-x)$$

$$\therefore 4\cos 10^\circ\cdot\sin 40^\circ\cdot\sin x=\sin(80^\circ-x)=\cos(x+10^\circ)=\cos x\cos 10^\circ-\sin x\sin 10^\circ$$

$$\therefore(4\cos 10^\circ\cdot\sin 40^\circ+\sin 10^\circ)\sin x=\cos 10^\circ\cdot\cos x$$

$$\therefore(8\sin 10^\circ\cdot\cos 10^\circ\cdot\sin 40^\circ+2\sin^2 10^\circ)\sin x=2\sin 10^\circ\cdot\cos 10^\circ\cdot\cos x$$

$$\therefore(4\sin 20^\circ\cdot\sin 40^\circ+2\sin^2 10^\circ)\sin x=\sin 20^\circ\cdot\cos x$$

$$\therefore(4\sin 20^\circ\cdot\sin 40^\circ+2\sin^2 10^\circ-\cos 20^\circ)\sin x=\sin 20^\circ\cdot\cos x-\cos 20^\circ\sin x=\sin(20^\circ-x)\text{……②}$$

ここで，$4\sin 20^\circ\cdot\sin 40^\circ+2\sin^2 10^\circ-\cos 20^\circ=-2(\cos 60^\circ-\cos 20^\circ)+2\sin^2 10^\circ-\cos 20^\circ$

$=-1+\cos 20^\circ+2\sin^2 10^\circ=0$であるから，②より

$\sin(20^\circ-x)=0$である．$0^\circ<x<80^\circ$より$x=20^\circ$．よって，$\angle OBC=20^\circ$なので$\angle BOC=100^\circ$…（答）

4．　『1999年　日本数学オリンピック　問題番号8』

三角形 ABCで，$\angle A=60°$，$\angle B=20°$，$AB=1$のとき

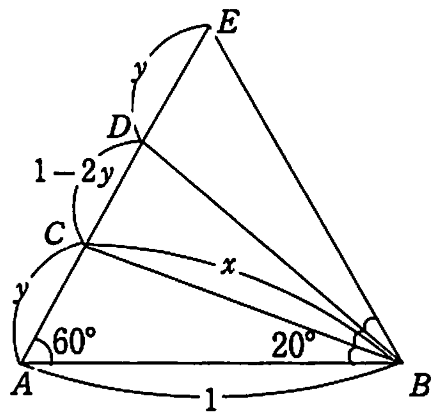
$\dfrac{1}{AC}-BC$ の値を求めよ．

解答

$\triangle ABC$が上記のように正三角形ABEの一部であることに着目し，

$BC=x$，$CA=y$とおくと，三角形の頂角の二等分線の性質により，

$AC:DC=BA:BD$



これは，$y:(1-2y)=1:x$

よって，$xy=1-2y$

$y\neq0$なので，yで割ると

$$x=\frac{1}{y}-2$$

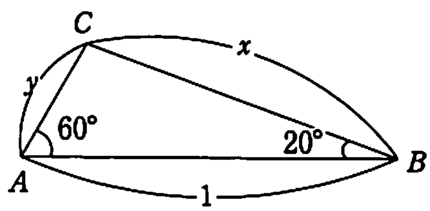
$$\frac{1}{y}-x=2$$

これは，$\dfrac{1}{AC}-BC=2$… (答)

であることを示している。

別解

$\triangle ABC$において，正弦定理を適用すると，



$$\frac{x}{\sin 60°}=\frac{y}{\sin 20°}=\frac{1}{\sin 100°}=2R$$

これより，$x=\dfrac{\sin 60°}{\sin 100°}$，$y=\dfrac{\sin 20°}{\sin 100°}$

求める値 $\dfrac{1}{AC}-BC$

$$=\frac{\sin 100°}{\sin 20°}-\frac{\sin 60°}{\sin 100°}\cdots\cdots①$$

$$=\frac{\sin^2 100°-\sin 20°\sin 60°}{\sin 20°\cdot\sin 100°}$$

$$=\frac{\dfrac{1-\cos 200°}{2}+\dfrac{1}{2}(\cos 80°-\cos 40°)}{-\dfrac{1}{2}(\cos 120°-\cos 80°)}$$

$$=\frac{1-\cos 200°+\cos 80°-\cos 40°}{\cos 80°-\cos 120°}$$

$$=\frac{1+\cos 80°-(\cos 200°+\cos 40°)}{\cos 80°-\left(-\dfrac{1}{2}\right)}$$

$$=\frac{1+\cos 80°-(2\cos 120°\cos 80°)}{\cos 80°+\dfrac{1}{2}}$$

$$=\frac{1+\cos 80°-2\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)\cos 80°}{\cos 80°+\dfrac{1}{2}}=\frac{2\cos 80°+1}{\cos 80°+\dfrac{1}{2}}=2\cdots\ (答)$$