平成25年度京都数学コンテスト（京都数学グランプリ2013　1 stステージ）略解

$\boxed{1}$ (1) $\sqrt{25a^2+1425a}=\sqrt{5^2a^2+3\times5^2\times19a}=5\sqrt{a^2+3\times19a}$

であるから，$\sqrt{25a^2+1425a}$ が整数となるには，$a^2+3\times19a$ が平方数とならなければならない。

ここで，a は素数であるから，条件を満たすには，3×19 が a の倍数とならなければならない。

よって，a の候補は 3 と19 である。

$a=3$ のとき，

$$\sqrt{25a^2+1425a}=5\sqrt{3^2+3^2\times19}=30\sqrt{5}$$

となって，整数とならず適さない。

$a=19$ のとき，

$$\sqrt{25a^2+1425a}=5\sqrt{19^2+3\times19^2}=190$$

となって，整数となるので適する。

したがって，$a=19$

逆に $a=19$ のとき，条件を満たす。

以上から，$a=19$ ……$\boxed{答}$

(2) 図のように，辺 BC の延長線上に AD=CE となる点 E をとる。

このとき，△ABD と △CDE は，底辺をそれぞれ AD，CE と考えれば高さは同じであるから面積も等しい。したがって，

（台形ABCDの面積）＝（△ABDの面積）＋（△BCDの面積）

＝（△CDEの面積）＋（△BCDの面積）

＝（△BDEの面積）

また，四角形ACED は平行四辺形であるから AC∥DE であり，これと AC⊥BD から BD⊥DE となり，△BDE は∠BDE=90° の直角三角形である。

次に，点D から直線 BC に垂線 DH を下ろす。

△BDHは直角三角形であるから，三平方の定理を用いて BH=9

また，直角三角形の相似条件から △BDE ∽ △BHD となるので

$$\begin{aligned} BD : BH &= DE : HD \\ 15 : 9 &= DE : 12 \\ DE &= 20 \end{aligned}$$

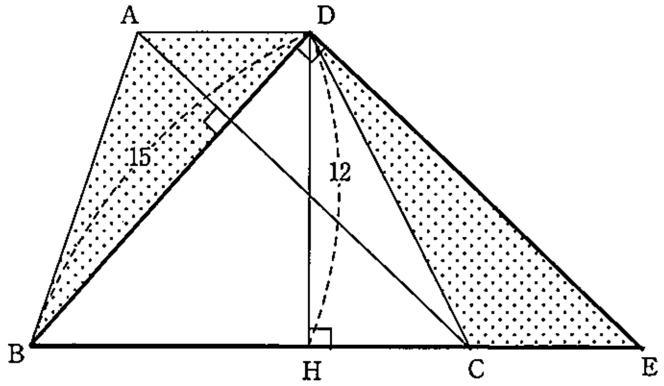
以上より，台形ABCD の面積は

（台形ABCD面積）＝（△BDEの面積）

$= BD\times DE\div2$

$=15\times20\div2$

$=150$ ……$\boxed{答}$



別解

点 D，A から直線 BC にそれぞれ垂線 DE，AF を下ろし，対角線 AC と BD の交点を P とする。このとき，

$\angle BPC = 90°$ より，$\angle DBE = 90° - \angle ACB$ …①

$\angle AFC = 90°$ より，$\angle CAF = 90° - \angle ACB$ …②

①，②より，$\angle DBE = \angle CAF$ …③

また，　$\angle DEB = \angle CFA = 90°$ …④

③，④より，$\triangle DBE \backsim \triangle CAF$

相似な三角形の対応する辺の比は等しいので，$DB : BE = CA : AF$ …⑤

台形の高さは 12 であるから，$AF = DE = 12$

また，三平方の定理より，$BE = \sqrt{DB^2 - DE^2} = \sqrt{15^2 - 12^2} = 9$

⑤より，$15 : 9 = CA : 12$

$\therefore\ CA = 20$

対角線が直交する四角形の面積は（対角線の長さの積）÷2 で求められるので，この台形の面積は，$\dfrac{15 \times 20}{2} = 150$ ……答

(3) まず，互いに区別できる 12 個のボールを，互いに区別できる 3 つの箱 A，B，C に入れる場合を考える。12 個のボールそれぞれにつき，A，B，C のいずれかに入れる 3 通りの入れ方があるので，ボールの入れ方の総数は 3^{12} 通り ……（*）

次に A，B，C の箱が区別できないときを考えると，12 個のボールを 1 つの箱にすべて入れる場合の数は 1 通りである。この 1 通りを，（*）では A，B，C の箱を区別することによって 3 通りに数えている。

また，A，B，C の箱が区別できないとき，12 個のボールを 2 つまたは 3 つの箱に入れる場合の数を x 通りとする。この x 通りを，（*）では A，B，C の箱を区別することによって 3! 倍して数えている。

以上から

$$3!x + 3 = 3^{12}$$

$$x = \frac{3^{11} - 1}{2}$$

よって，求める場合の数は

$$x + 1 = \frac{3^{11} - 1}{2} + 1 = \frac{3^{11} + 1}{2}\ \text{通り}$$ ……答

(4) まず，次の①，②について確認する。

① Bの発言「僕がグーを出さなかったら，あいこになったよ」は，

「Bはグーを出さなかった ⟹ 勝敗が決まらなかった」

と書き換えることができるので，その否定は

「Bはグーを出さなかった，かつ，勝敗が決まった」

となる。

② Aの発言「グーを出した人は発言が正しいよ」は，

「グーを出した人は全員発言が正しい」」

と書き換えることができるので，その否定は

「グーを出した人で，発言が正しくない人がいた」

となる。

したがって，グーを出した人が誰もいなかったとき，「グーを出した人は全員発言が正しい」は真となる。

以上の点に注意して解答を進める。

Bの発言に注目する。これを正確に書くと次のようになる。

「Bはグーを出さなかった ⟹ 勝敗が決まらなかった」

まず，「Bの発言が正しい」と仮定する。

条件よりBは勝者であるから，勝敗が決まったことがわかる。

また，Bの発言の対偶

「勝敗が決まった ⟹ Bはグーを出した」

も正しいので，Bはグーで勝ったことがわかる。

このとき，問題の条件より，

（グーを出す人）＝（勝者）＝（発言が正しい人）

となり，Aの発言が正しい。つまり，Aは勝者である。

この時，AとBがグーで勝つので，Cはチョキで負けなければならない。するとCの発言も正しいことになり，条件に反する。

したがって，最初の仮定が間違いであり，Bの発言は正しくない。

次に，Bの発言を否定すると①から

「Bはグーを出さなかった，かつ，勝敗が決まった」

となるが，この命題が真であるから，勝敗は決まったことになり，Bは敗者であることがわかる。

さらに，Bは，(ア)チョキを出したか，(イ)パーを出したかのいずれかである。

(ア)の場合，グーを出した人が勝者であり，Aの発言が正しいことがわかる。Cが敗者であるとすると，チョキを出したことになるが，Cの発言が正しいことになり矛盾が生じる。一方，Cが勝者であるとすると，グーを出したことになるが，Cの発言が正しくないことになり，やはり矛盾が生じる。

(イ)の場合，勝者はチョキを出していて，グーを出した人がいないので，②からAとCの発言が正しいことがわかる。

(ア)，(イ)どちらの場合もAの発言は正しいので，Aは勝者である。

さらに，Cは負けるなら，Cはグーを出すので，Cも勝者でなければならない。

以上より，勝敗は，

A：勝ち，B：負け，C：勝ち

である。さらに検討すると出した手が次のようになることも分かる。

A：チョキ，B：パー，C：チョキ　……答

別解

Aの発言に着目する。

Aの発言が正しくないと仮定すると，「グーを出した，かつ，発言が正しくない」者がいる。

あいこになっていたとすると，3人とも発言は正しくないことになる。Bの発言の否定が真になるので，①から勝敗が決まったことになり矛盾。あいこになっていないので，グーとパーで勝敗がついたことがわかる。

Bがパーを出したとすると，「Bの発言が正しくない，かつ，Bが勝者」となり矛盾。

Bがグーを出したとすると，「Bの発言が正しい，かつ，Bが敗者」となり矛盾。

よって，Aの発言が正しい。したがって，次のいずれかが成り立つ。

(ア)　勝者はグーを出した。

(イ)　グーを出した人がいなかった。

(ア)の場合，Cはグーまたはチョキである。

Cがグーを出したとすると，「Cの発言は正しくない，かつ，Cは勝者」となり矛盾。

Cがチョキを出したとすると，「Cの発言は正しい，かつ，Cは敗者」となり矛盾。

(イ)の場合，Aは勝者であるからAはチョキ。

Bの発言は正しくないのでBは敗者である。すなわちBはパー。

Cの発言は正しいのでCは勝者である。すなわちCはチョキ。

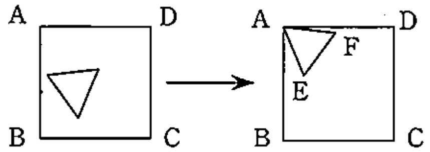
以上より

A：チョキ，B：パー，C：チョキ　……答

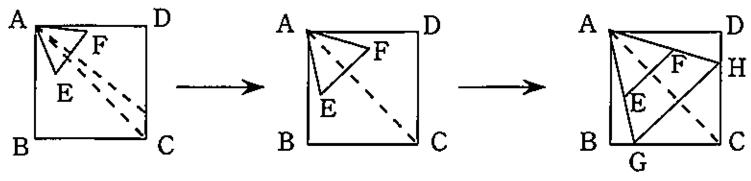
※最初にあいこになったとして矛盾を導き，あいこにはならなかったことを示しても良い。

2　正方形の4頂点をA，B，C，Dとして，それに含まれる正三角形を考える。

その正三角形を回転移動や平行移動することで，正三角形のどれか1つの頂点を，正方形の頂点のどれか1つの頂点に一致させることができる。その頂点をAとしても一般性は失われない。



正三角形の残りの頂点をE，Fとする。正三角形の辺EFの垂直二等分線が正方形の対角線ACと一致していない場合には，頂点Aを中心とする回転移動により一致させることができる。直線AEと辺BCの交点をG，直線AFと辺CDの交点をHとすると，最初の正三角形がどのようなものであっても，それと合同な正三角形が正三角形AGHの内部（辺を含む）に含まれる。



よって，正三角形 AGH は最大である。

次に，正三角形 AGH の 1 辺の長さを a とし，辺 GH と正方形の対角線 AC との交点を P とする。

△APH は ∠APH ＝90°，∠AHP＝60° の直角三角形であるから，

$$\mathrm{PH} : \mathrm{AH} : \mathrm{AP} = 1 : 2 : \sqrt{3}$$

したがって，

$$\mathrm{PH}=\frac{1}{2}a,\quad \mathrm{AP}=\frac{\sqrt{3}}{2}a$$

△CPHは ∠CPH ＝90°，∠HCP＝45° の直角三角形であるから，

$$\mathrm{CP} : \mathrm{PH} : \mathrm{CH} = 1 : 1 : \sqrt{2}$$

したがって，

$$\mathrm{CP}=\frac{1}{2}a$$

AP+CP=AC であるから

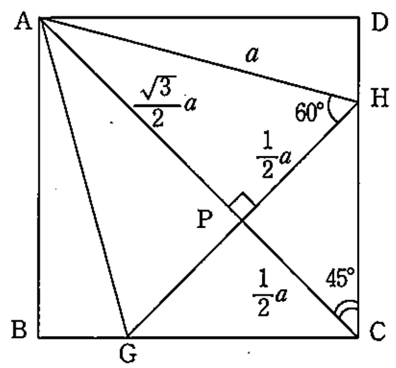
$$\frac{1}{2}a+\frac{\sqrt{3}}{2}a=\sqrt{2}$$

これを解いて，

$$a=\sqrt{6}-\sqrt{2}$$

したがって，求める最大値は

$\sqrt{6}-\sqrt{2}$ ……答



3　1 から n までの番号が書かれたカードで，条件 (a) を満たす並べ方の総数を $a(n)$ とする。

まず 2013 と書かれたカードを考える。

このカードを配置する場所は，左から 1 番目～ 25 番目のいずれかでなければならない。

残ったカードの配置を考えるとき，2013 のカードの位置は 2012 以下のカードにとっては影響がないので，$a(2013)=25\times a(2012)$ が成立する。

同様に，$a(2012)=25\times a(2011)$，$a(2011)=25\times a(2010)$，…，$a(26)=25\times a(25)$

カードの枚数が 25 枚であるとき，並べ方には制限がないので，$a(25)=25!$ である。

つまり，求める並べ方の総数は，

$a(2013)=25^{2013-25}\times a(25)=25^{1988}\times 25!$ 通り　……答

（注：$25^{1989}\times 24!$，$5^{3976}\times 25!$，$5^{3978}\times 24!$ などはいずれも正答とする）

$\boxed{4}$　a_k を，各桁に 1 から 5 までの数字だけを用いてできる k 桁の自然数で，5^k の倍数であるものとする。

$a_1=5$ ，$a_2=25$ ，$a_3=125$ である。

a_4 の最高位の数字を x とすると，a_4 の下 3 桁は 125 に限るから

$$a_4=10^3x+125$$

5^3 で両辺を割ると

$$\frac{a_4}{5^3}=2^3x+1=8x+1$$

a_4 が 5^4 で割り切れるので，$8x+1$ は 5 で割り切れる。$x=1,\ 2,\ \cdots,\ 5$ のうち適するものは，$x=3$ に限る。

よって，$a_4=3125$

同様にして a_5 の最高位の数字を y とすると

$$a_5=10^4y+3125$$

5^4 で両辺を割ると

$$\frac{a_5}{5^4}=2^4y+5=16y+5$$

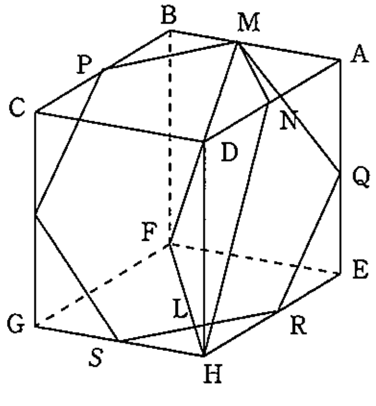
a_5 が 5^5 で割り切れるので，$16y+5$ は 5 で割り切れる。$y=1,\ 2,\ \cdots,\ 5$ のうち適するものは，$y=5$ に限る。

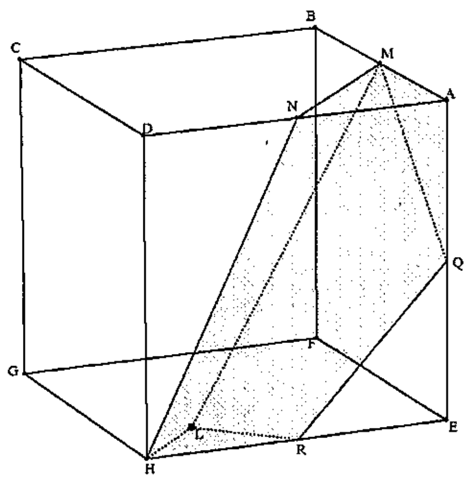
よって，$a_5=53125$

以下，同様にこの作業を繰り返して，$a_7=4453125$ ……答

$\boxed{5}$　辺 EH，GH の中点をそれぞれ R，S とし，線分 FH，SR の交点を L とする。

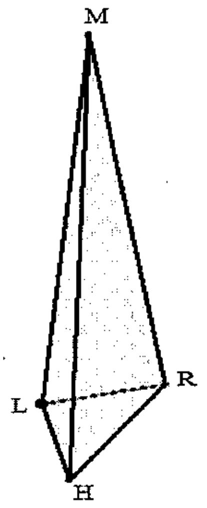
切り取られる立体は下図の通り。



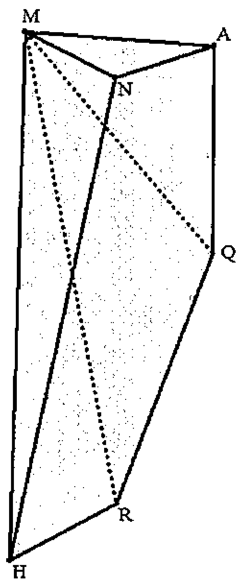


この立体をさらに3点M，H，Rを通る平面で切断し，下の図のような2つの立体 X，Y に分ける。

立体 X
（三角錐M−LHR）



立体 Y
（五角錐M−ANHRQ）



立体 X の体積は

$$(\triangle\text{LHR の面積})\times(\text{高さ AE})\times\frac{1}{3}=\frac{1}{16}\times 1\times\frac{1}{3}$$
$$=\frac{1}{48}$$

立体 Y の体積は

$$(\text{五角形 ANHRQ の面積})\times(\text{高さ AM})\times\frac{1}{3}=\frac{5}{8}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}$$
$$=\frac{5}{48}$$

よって求める体積は

$\frac{1}{48}+\frac{5}{48}=\frac{1}{8}$ ……答

別解

直線 DA と直線 RQ の交点を T，直線 NH と直線 RQ の交点を U とする。

求める立体は，三角錐 U−NMT から，三角錐 U−HLR と三角錐 Q−AMT を除いたものであるから，求める体積を V とすると，

$V=$（三角錐U−NMT の体積）

−（三角錐U−HLR の体積）

−（三角錐Q−AMTの体積）

$=\frac{1}{4}\times2\times\frac{1}{3}-\frac{1}{16}\times1\times\frac{1}{3}-\frac{1}{8}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}$

$=\frac{1}{8}$ ……答