3年普通科　数学Ⅲ　教科書　**解答**

[323改訂版 高等学校 数学Ⅲ 練習26]

(1)　$y'=3ax^2$，$y''=6ax$，$y'''=6a$

(2)　$y=x^{-1}$ であるから　　$y'=-x^{-2}$，$y''=2x^{-3}$，$y'''=-6x^{-4}$

よって　　$y'=-\dfrac{1}{x^2}$，$y''=\dfrac{2}{x^3}$，$y'''=-\dfrac{6}{x^4}$

(3)　$y'=-\sin x$，$y''=-\cos x$，$y'''=\sin x$

(4)　$y'=\dfrac{1}{x}$，$y''=-\dfrac{1}{x^2}$，$y'''=\dfrac{2}{x^3}$

(5)　$y'=e^x$，$y''=e^x$，$y'''=e^x$

(6)　$y'=-2e^{-2x}$，$y''=4e^{-2x}$，$y'''=-8e^{-2x}$

[323改訂版 高等学校 数学Ⅲ 練習27]

(1)　$y'=nx^{n-1}$，$y''=n(n-1)x^{n-2}$，……，$y^{(n)}=n(n-1)\cdot\cdots\cdots\cdot 2\cdot 1=n!$

(2)　$y'=2e^{2x}$，$y''=2^2e^{2x}$，……，$y^{(n)}=2^ne^{2x}$

補足　上で求めた第 n 次導関数は予測でしかないので，厳密には証明すべきである。
自然数 n についての式であるから数学的帰納法で示す。

(1)　関数 $y=x^n$ の第 n 次導関数が $y^{(n)}=n!$ であることを数学的帰納法で示す。

(i)　$n=1$ のとき　$y=x^1=x$ の第 1 次導関数は $y^{(1)}=1=1!$ より成り立つ。

(ii)　$n=k$ のとき　$y=x^k$ の第 k 次導関数は　$y^{(k)}=k!$ ……(∗)　であると仮定する。

このとき，$y=x^{k+1}$ の第 1 次導関数は　$y^{(1)}=(k+1)x^k$　である。

さらに両辺を k 回微分すると，①より　$y^{(k+1)}=(k+1)\cdot k!=(k+1)!$

よって，$n=k+1$ のときも成り立つ。

(i)(ii) からすべての自然数 n において　関数 $y=x^n$ の第 n 次導関数が $y^{(n)}=n!$　が成り立つ。

［323改訂版 高等学校 数学Ⅲ 練習28］

$y=2\sqrt{x}$ の両辺を x で微分すると

$$\frac{dy}{dx}=2\cdot\frac{1}{2}\cdot x^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{x}}$$

よって　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2}{y}$

$y=-2\sqrt{x}$ の両辺を x で微分すると

$$\frac{dy}{dx}=-2\cdot\frac{1}{2}\cdot x^{-\frac{1}{2}}=-\frac{1}{\sqrt{x}}$$

よって　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2}{y}$

［323改訂版 高等学校 数学Ⅲ 練習29］

(1)　$x^2+y^2=1$ の両辺を x で微分すると　$2x+2y\cdot\dfrac{dy}{dx}=0$

　よって，$y \fallingdotseq 0$ のとき　$\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{x}{y}$

(2)　$x^2-y^2=1$ の両辺を x で微分すると　$2x-2y\cdot\dfrac{dy}{dx}=0$

　よって，$y \fallingdotseq 0$ のとき　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x}{y}$

［323改訂版 高等学校 数学Ⅲ 練習30］

(1)　$\dfrac{dx}{dt}=4t$，$\dfrac{dy}{dt}=2$ から　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2}{4t}=\dfrac{1}{2t}$

(2)　$\dfrac{dx}{dt}=-\sin t$，$\dfrac{dy}{dt}=\cos t$ から　$\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{\cos t}{\sin t}$