練習１７

対偶「n が偶数ならば，n^2 は偶数である」を証明する。
n が偶数のとき，n はある整数 k を用いて $n=2k$ と表される。このとき

$$n^2=(2k)^2=2\cdot 2k^2$$

$2k^2$ は整数であるから，n^2 は偶数である。
よって，対偶は真である。
したがって，もとの命題は真である。

練習１８

対偶「$x\leqq 0$ かつ $y\leqq 0$」$\Longrightarrow$ $x+y\leqq 0$
は真である。したがって，もとの命題は真である。

練習１９

$\sqrt{\pi}$ は無理数でないと仮定すると，$\sqrt{\pi}$ は有理数である。
その有理数を r とすると　$\sqrt{\pi}=r$
両辺を 2 乗すると　$\pi=r^2$
r が有理数のとき r^2 は有理数であるから，この等式は π が無理数であることに矛盾する。
したがって，$\sqrt{\pi}$ は無理数である。

練習２０

$\sqrt{3}$ が無理数でない，すなわち有理数であると仮定すると，1 以外に正の公約数をもたない 2 つの自然数 a，b を用いて $\sqrt{3}=\dfrac{a}{b}$ と表される。
このとき　$a=\sqrt{3}\,b$
両辺を 2 乗すると　$a^2=3b^2$ ……①
よって，a^2 は 3 の倍数，したがって，a も 3 の倍数である。
ゆえに，a は，ある自然数 c を用いて

$$a=3c \quad \cdots\cdots ②$$

と表される。
② を ① に代入すると　$9c^2=3b^2$
すなわち　$b^2=3c^2$
よって，b^2 は 3 の倍数，したがって，b も 3 の倍数である。
a と b はともに 3 の倍数であり，公約数 3 をもつ。
このことは，a と b が 1 以外に正の公約数をもたないことに矛盾する。
したがって，$\sqrt{3}$ は無理数である。

(p.63) 発展　練習１

(1)　与えられた命題の否定は

ある実数 x について $x+1\leqq 0$

$x=-2$ のとき，$x+1\leqq 0$ である。
したがって，もとの命題は偽であり，その否定は真である。

(2)　与えられた命題の否定は

すべての素数 n について $n+2$ は素数でない。

$n=3$ のとき，$n+2$ は素数である。
したがって，もとの命題は真であり，その否定は偽である。