

1 研究対象教科 数学

2 研究課題

新学習指導要領に対応した思考力・判断力・表現力等の育成のための指導方法や教材の研究

3 研究の概略

取組の当初では、数学における「ことばの力」とは何かという根本的な部分での考察から始めた。特に重視すべきと判断したのは、以下の力である。

(ア) 問題文等を読んで何が条件で、何を求めればよいのか、何を証明すればよいのかを論理的に正しく理解する力

(イ) 証明や解答で、根拠を明らかにしながら、矛盾なく、かつ無駄もなく、正しい言葉や数学的記号を用いて表現・記述する力

(ウ) 自分の証明や解答を言葉にし、場合によっては図やグラフ等を用いて正確に相手に伝える力

(エ) 相手の説明を聞いて、その内容を正しく理解したり、もしも相手の説明に間違いや不十分な点があれば、それを的確に指摘・表現する力

そして、これらの力を育成するための新学習指導要領に対応した授業改善の取組の一つとして捉え、この研究を進めることにした。

なお、アドバイザーとして、龍谷大学理工学部の大西俊弘准教授に指導・助言を受けている。

以下は年度ごとのおおまかな取組の経緯と内容である。

(1) 平成21年度

主に、情報収集と今後の研究及び実践の方向性を探る1年であったが、具体的な取組としては「ことば」の中でもまずは数学の記述力・論証力に着目した。証明問題では、計算をして値を求めるような問題に比べて白紙あるいは一部しか書いていない答案が多く、書き方も不十分な点が多く見られ、生徒にとって苦手な分野である。そこで、論理的に考え、数式や数学記号を含めて正確に記述できる力がどの程度身についているかを調べるため、定期考査において「論理と集合」「平面図形」の各単元の証明問題で、生徒の現在の状況を把握した。その上で、定期考査の後、生徒の書いた証明のいくつか典型的な例をもとに振り返りプリントを作成し、不十分な部分や逆に不必要な部分はないか、根拠を明確にして説明されているかなどを生徒に問いかけ、みんなに考えさせながらより良い証明や解答を作成していく授業を行った。

また、「数学I」、「数学A」の総復習をしていく段階の問題演習で、問題の解答を生徒に板書させるのではなく、生徒自身が作成したプリントを使って生徒自身にみんなの前で説明させ、その説明でわかりにくい点や疑問点を他の生徒から質問させるような形態の授業も取り入れた。ただ、どうしても生徒は質

問したりする行為に遠慮がちになるので、教師側からある程度誘導していくことも必要であった。

## (2) 平成22年度

第1学年の第I類と第II類において、新学習指導要領の「数学I」と「数学A」で新たに設定されている「課題学習」を念頭に置き、「自らの考えを数学的に表現し、根拠を明らかにして説明したり、議論したりすること」により言語活動の充実を図る取組を行った。

第I類では、文章問題を主体的に解決することを通して、数学的な思考力、判断力を高めるとともに、発表を通して、数学的な表現力の向上を図ることをねらいとして、教科書で扱われている文章問題をグループ別に解答を作成し、その内容を生徒の前で発表する形態の授業に取り組んだ。この取組では、発表内容や発表方法をお互い相談しながら工夫するなど事前の予想以上に積極的な生徒の姿勢が見られ、継続していけば表現力の向上に繋がる可能性が感じられた。一方で生徒間評価の活用等、評価基準や評価方法を確立していく必要性を感じた。

第II類では、解答を自分で作成するだけでなく、他の生徒にわかるように説明したり、他の生徒の誤りを理由とともに指摘したり、さらに他の生徒の説明を参考にしながら、正しい結論を導くといった数学的表現力や判断力を付けさせることをねらいとして、応用問題を解かせた答案を回収して、無作為に別の生徒に配布し、正解を与えずにそれらを添削させ、その後本人に返却して最終答案を作成するような形で授業を行った。この取組では、他の生徒の答案について添削することにより、普段と違って主体的な思考力の育成に繋がられるが、実際には一人で正解を導く以上の学力を必要とするため、すべての生徒にいかにして意欲的に取り組ませていけるかが課題となった。

## (3) 平成23年度

前年度の取組を発展させた形で、第1学年の「課題学習」に絞って、担当者6人が第2学期にそれぞれ異なった内容で授業を行った。共通の留意点として次の点を事前に確認しておいた。

- ①できるだけ生徒にとって身近なものや、これまでの学習内容を発展させたものなど、少しでも生徒の関心や意欲を高められる教材・課題を選ぶ。
- ②1年間の指導計画の中で、適切な時期や場面を考慮して実施する。
- ③一方的に知識を与えるのではなく、生徒の発表やグループ学習をする場面をできるだけ取り入れる。
- ④評価方法についても考慮する。

課題学習にかけた時間数としてはそれぞれ2時間から6時間程度と幅があったが、各担当者の持ち味を出した授業が展開できたのではと考える。

なお、課題については、あまり簡単すぎず、また一方で生徒がある程度自分達のできそうだという見通しを持つことができるレベルのものを準備する必要がある。また、このような取組にあまり慎重になりすぎずにグループ学習や発表

等の実践を重ね、その手法や評価方法について、実績を積み上げていくことが重要であると思われる。

#### 4 他校視察

各年度2名ずつ、計6名の教員が他府県の先進的な取組について学ぶ機会を得た。

##### (1) 平成21年度

沖縄県立開邦高校（文部科学省SSH指定校）

第2学年の「理数探究」の時間で、生徒各自にテーマを決めさせ、教員の助言を受けながら各自が研究し、それを生徒全員の前で発表させる取組の具体的な例について説明を受けた。テーマとしては、数学で比較的有名な問題から沖縄という地域の特性に関連したものなど様々で、ユニークなものも多く、テーマ設定の仕方は大変参考になった。ただこの科目の授業は1名ないし2名の個別研究が中心になっており、グループ内で事前に相談・議論する場面が少なく、しかもテーマの数が多いため、指導する教員の負担が大きいと感じられた。

##### (2) 平成22年度

広島県立安芸南高校（文部科学省学力向上実践研究推進事業の指定校）

生徒の論理的な思考力、表現力を育成し、学習意欲を高める授業モデルを構築することを主たるテーマとして、研究及び実践を実施されてきた学校である。校長が中心となって、全校・全教科で研究及び実践に取り組んでいる様子が窺え、研究主任を中心とした校内研究組織が構成され、組織的、体系的に研究が実施されていた。

広島県立忠海高校（広島県教育委員会「ことばの教育」パイロット校指定事業）

小規模校のメリットを生かして、個々の教員の発想を実践に直結させた指導が効果的であると感じられた。すべての教科で定期テストに論述問題を課すなど、学校全体としての取組も参考になった。

##### (3) 平成23年度

埼玉県立浦和高校

単位制の高校で、教科書の内容は2年生でほぼ終え、3年生の数学では、ゼミ形式の授業を取り入れている。また、総合的な学習の時間においては各担当者が設定したテーマを生徒が興味に応じて選択し、ゼミ形式の授業を展開していて、生徒同士で教え合いながら学んでいくことを重視しているところが参考になった。

埼玉県立大宮高校

理数科を設置する高校で、65分授業を実施している。2年間で3年分の数学を学習するカリキュラムが組まれており、文系の生徒も「数学Ⅲ」の一部を学習するなどの特徴がある。この学校でも上位層の生徒向けではあるが、3年生の数学ではゼミ形式の授業を取り入っていた。

## 5 まとめと今後の課題

3年間の取組から、今後とも「課題学習」の数学的活動で用いる教材としてどのようなものが適当か、言語活動をいかにその中で取り入れていけばより効果的かについて、もっと研究を進め新学習指導要領に対応した授業を進めていく必要性を感じた。これまでの授業はややもすると教師が説明し、生徒が問題演習をするといった授業の繰り返しの、言わば「教え込む」的な授業になりがちで、数学を入試等に必要な知識として習得し、問題の答を求めるなどの知識の習得や技能の習熟に偏っていた。別の言い方をすれば「教師のことば」に頼り過ぎた授業になっていたのではないかという反省がある。もっと「生徒のことば」、それは生徒間同士の会話や、生徒が発表・発言したときの生徒自身のことばも含めて、それらを大切にす授業を重視していく必要がある。そのため「数学Ⅰ」、「数学A」の「課題学習」に限らず、その他の科目の授業でも、生徒が発表・質問したり、教材に対して生徒同士が議論したり、確認し合う会話ができるような場面が少しでも作れるよう、授業展開を工夫していく必要がある。具体的には、毎時間の授業のまとめを教師が一方的に説明するばかりではなく、それを生徒に表現させたり、また、生徒が板書した解答を生徒自身に説明させたり、解答に誤り等がある場合は他の生徒にその誤りや不十分な点を考えさせ説明させるなどが考えられる。そうした地道な積み重ねによって、生徒に数学の有用性や数学を学ぶ意義を認識させ、根気よく論理的に考え続ける力を養い、根拠を明確にして説明する能力を高めていけるのではないだろうか。さらには、知識を生み出し、加工し、使いこなし、人々に伝えて、みんなで共有することによって動いていく知識基盤社会に必要な人材を育成していけるのではと考える。

## 研究事例 1

### 1 単元名 図形と計量

### 2 単元の目標

正弦定理や余弦定理などを用いて教科書で扱った有名角以外の角の三角比が求められる。また、発表を通じて自分以外の考え方を知るとともに、より深い三角比の理解を図る。

### 3 テーマ「発見数学！～有名角以外の三角比を求めよう～」

正五角形を用いて、有名角以外の三角比を求める活動を行った。導入では有名角を用いて  $15^\circ$  と  $75^\circ$  の三角比を一斉授業の形式で求め、その後正五角形を導入し三角比を求めさせたのち、4人ずつ10班に分け各三角比の求め方を発表させた。

### 4 単元の展開

#### (1) 問題理解（一斉授業） … 1時間

$15^\circ$ 、 $75^\circ$  の三角比を求め、正五角形に隠れている角度を提示した。その後、まずは一人で三角比を求めさせた。

#### (2) 意見交流・準備（班別活動） … 2時間

4人ずつ10班に分け、自分の解法を班内で発表。その後、班長・書記・発表（2人）と役割分担をし、発表の準備をさせた。

#### (3) 発表（一斉授業） … 3時間

各班、担当の角度を決め、順に発表。その際、次の発表の班長に質問をさせ、解法の全体理解を図った。また、振り返りシートを配布し、生徒一人一人に各班の評価をさせた。

#### (4) まとめ（一斉授業） … 1時間

解答が複数の場合は、有理化をすることで同じ値になること、関数電卓を使って値を計算することで、巻末の三角比の表と値が一致していることを確認した。

### 5 評価方法

取り組みの状況を問題解決／取組意欲／発表態度／聴講態度／自己評価の5観点に分け、各生徒を観察によって1・2・3・4・5段階評価を行った。提出物の出来具合による評価も行った。

## 6 参考資料

### (1) 個人ワークシート

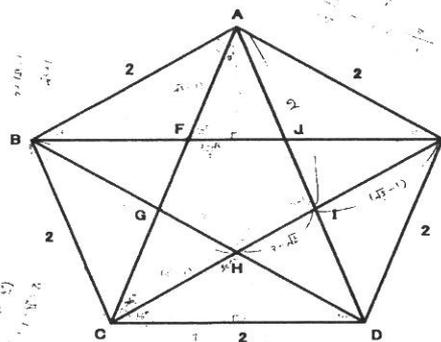
発展数学！～有名角以外の三角比を求めよう～

1年9月

	0°	15°	18°	22.5°	30°	45°	60°	75°	90°
sin	0	$\frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}}{4}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{5}+1}{4}$	$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}}{4}$	0
tan	0	$\frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}}{4}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}}{4}$	> 1

(1) 15° と 75° の三角比を求めよう。

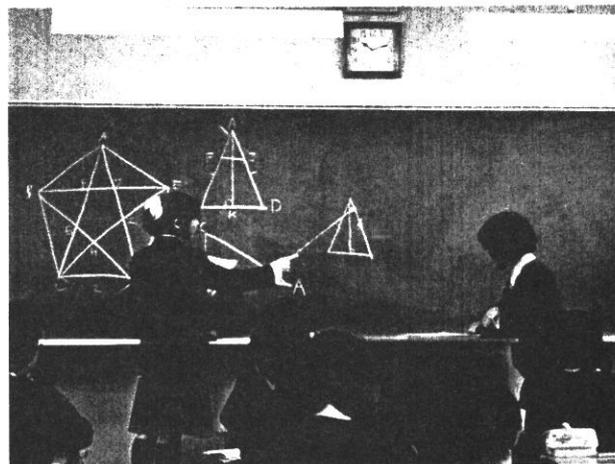
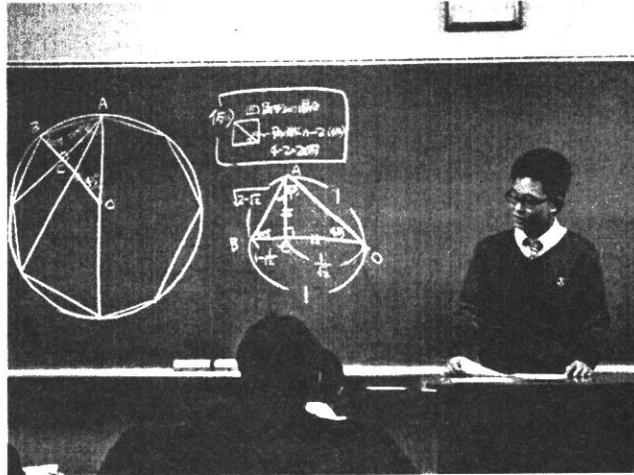
(2) 正五角形を利用して求められる三角比を求めよう！



(3) 22.5° と 67.5° の三角比を求めるときは正五角形を借ればよいと覚えよう！



(3) 班別発表



(4) 振り返りシート

発見数学！ 振り返りシート

1年9月

(1) 他の班の発表をしっかりと聞きましょう。

上中

(小1) 班

① 発表の順番 (声の大きさ)	とても良い	良い	普通	悪い	とても悪い
① 発表の順番 (声の大きさ)	5	4	3	2	1
② 発表のわかりやすさ	5	4	3	2	1
③ 準備がしらができていたか	5	4	3	2	1
④ 工夫がされていたか	5	4	3	2	1
⑤ この班、ここが良かった！	( 黒板の書き出しが、とても分かりやすかった )				

16/20

中

(中1) 班

① 発表の順番 (声の大きさ)	とても良い	良い	普通	悪い	とても悪い
① 発表の順番 (声の大きさ)	5	4	3	2	1
② 発表のわかりやすさ	5	4	3	2	1
③ 準備がしらができていたか	5	4	3	2	1
④ 工夫がされていたか	5	4	3	2	1
⑤ この班、ここが良かった！	( 黒板の書き出しが、とても分かりやすかった )				

17/20

下中

(小2) 班

① 発表の順番 (声の大きさ)	とても良い	良い	普通	悪い	とても悪い
① 発表の順番 (声の大きさ)	5	4	3	2	1
② 発表のわかりやすさ	5	4	3	2	1
③ 準備がしらができていたか	5	4	3	2	1
④ 工夫がされていたか	5	4	3	2	1
⑤ この班、ここが良かった！	( 黒板の書き出しが、とても分かりやすかった )				

17/20

下中

(中2) 班

① 発表の順番 (声の大きさ)	とても良い	良い	普通	悪い	とても悪い
① 発表の順番 (声の大きさ)	5	4	3	2	1
② 発表のわかりやすさ	5	4	3	2	1
③ 準備がしらができていたか	5	4	3	2	1
④ 工夫がされていたか	5	4	3	2	1
⑤ この班、ここが良かった！	( 黒板の書き出しが、とても分かりやすかった )				

17/20

下中

(小3) 班

① 発表の順番 (声の大きさ)	とても良い	良い	普通	悪い	とても悪い
① 発表の順番 (声の大きさ)	5	4	3	2	1
② 発表のわかりやすさ	5	4	3	2	1
③ 準備がしらができていたか	5	4	3	2	1
④ 工夫がされていたか	5	4	3	2	1
⑤ この班、ここが良かった！	( 黒板の書き出しが、とても分かりやすかった )				

17/20

下中

(中3) 班

① 発表の順番 (声の大きさ)	とても良い	良い	普通	悪い	とても悪い
① 発表の順番 (声の大きさ)	5	4	3	2	1
② 発表のわかりやすさ	5	4	3	2	1
③ 準備がしらができていたか	5	4	3	2	1
④ 工夫がされていたか	5	4	3	2	1
⑤ この班、ここが良かった！	( 黒板の書き出しが、とても分かりやすかった )				

17/20

中

(中1) 班

① 発表の順番 (声の大きさ)	とても良い	良い	普通	悪い	とても悪い
① 発表の順番 (声の大きさ)	5	4	3	2	1
② 発表のわかりやすさ	5	4	3	2	1
③ 準備がしらができていたか	5	4	3	2	1
④ 工夫がされていたか	5	4	3	2	1
⑤ この班、ここが良かった！	( 黒板の書き出しが、とても分かりやすかった )				

19/20

中

(中2) 班

① 発表の順番 (声の大きさ)	とても良い	良い	普通	悪い	とても悪い
① 発表の順番 (声の大きさ)	5	4	3	2	1
② 発表のわかりやすさ	5	4	3	2	1
③ 準備がしらができていたか	5	4	3	2	1
④ 工夫がされていたか	5	4	3	2	1
⑤ この班、ここが良かった！	( 説明の順番が、とても分かりやすかった )				

15/20

中

(中3) 班

① 発表の順番 (声の大きさ)	とても良い	良い	普通	悪い	とても悪い
① 発表の順番 (声の大きさ)	5	4	3	2	1
② 発表のわかりやすさ	5	4	3	2	1
③ 準備がしらができていたか	5	4	3	2	1
④ 工夫がされていたか	5	4	3	2	1
⑤ この班、ここが良かった！	( 説明の順番が、とても分かりやすかった )				

17/20

(2) 相手の説明はどうでしたか。

説明が、とても分かりやすかった。黒板の書き出しが、とても分かりやすかった。準備が、とてもできていた。工夫が、とてもされていた。

(3) この班の考えが一番かかっていますか。どんな点が良かったですか。

黒板の書き出しが、とても分かりやすかった。準備が、とてもできていた。工夫が、とてもされていた。

(4) この班の発表 (発表以外の三角比を求めたことについて)

黒板の書き出しが、とても分かりやすかった。準備が、とてもできていた。工夫が、とてもされていた。

(5) 班別まとめ

<p>二重根号とかばかり出てきたから計算に頭が痛くなったけど、何人かのチームで難しい問題を解くのは楽しかった。(発表はイヤ) 有名角以外の角も求めることができるということが分かったし、機会があればまた別の角の三角比も求めてみたい。</p>
<p>54°とかややこしい角が本当に三角比で出ることが分かってちょっとびっくりした。この問題は五角形でちょっと考えさせられるもので、角度に少し強くなれたし、普段の授業ではできないみんなの前で発表したりするところがあって発表の力もついたと思う。</p>
<p>有名角以外のものも、無理やり求められることが分かった。五角形で線を引いていって、余弦や正弦を使ったり、使わなかったり、班によって全然やり方が違うので面白かったです。</p>
<p>知らないことを考える過程で今まで学んだ様々な定理や自分の計算力が必要となるので、改めてもっと数学勉強しないとないと思いました。また、柔軟な発想も必要になるので、ひらめきを大切にしたいです。</p>
<p>有名角以外の三角比を求められたのはすごいと思うけれど、活用していけるのかがよく分からない。これを覚えるのは相当難しいと思います。リーダーの仕事少なすぎた…</p>
<p>とにかく計算がたくさんあって、難しかった。計算ミスしまくっちゃって大変でした…でも、求めた時の爽快感はすごくて、やりがいがあった。色々班によって考え方も解き方も違って聞いてて新しい発見があった。ただ解くだけじゃなくて、言葉でいかにうまく説明するかが大変で難しだな〜と思った。</p>
<p>とにかく計算が複雑だった。考え方も難しかった。でも、考え方が分かった瞬間、とてもうれしかった。でも興奮しすぎて計算ミスをしまくったのも事実なので、これから問題を解くときは、落ち着いて解き、解き終わってから興奮しようと思います！自分でも、難しい問題を解くことができるという自信がついた。これからの授業でも、同じような達成感を感じられたらいいと思った。有名角以外の三角比は全くきれいな数字にはならず、気持ち悪かったが、計算によって求められるなんてすごいと思った。</p>
<p>この授業は今までと違った雰囲気やっけていて楽しかった。60°や45°など以外の三角比を求め方がわかったけど計算がとても面倒だった。</p>
<p>この授業を通して有名角以外の三角比の求め方を知れたのでこの先の人生に大きく影響してくると思う。皆の説明力にビビらされるばかりであった。</p>
<p>有名角でなくても、これまで数Iや数Aで習ってきた図形の性質を使うことで、求められるのに感動した。また、その求め方もひとそれぞれで、求め方によって値がごちゃごちゃになったり、シンプルになるのも面白いなと思った。</p>
<p>様々な工夫で三角比が求められることがすごいなと思いました。一人で考えるだけでは出てこない答えも班で協力したりすることで解けたりもするなと思いました。なにより発表でいろんな意見を聞いたことが良かったです。</p>
<p>計算って楽しいってことが久しぶりに実感できた。もっといろいろな三角比を求めていきたい。またこの授業をしてみたい。(自分では解けなかったけれども)</p>
<p>今回この授業をして、三角比に少し親近感を持ちました。有名角以外の三角比はまだ私たちには求められないと思っていたけど、工夫したら私たちでも計算したら出せたのでとても楽しかったです。またこの活動をして、人に伝える難しさも知ることができました。みんなで発表原稿を仕上げ、意見を出しあうのはとてもいい経験になったと思いました。</p>

<p>クラスの色んな考え方が見られて「そうなんだ！」と思うようなこともたくさんあったので、今回の活動は良かったと思う。また、説明の仕方も工夫されている所がたくさんあって、これからの発表の時に役に立つような説明がされていて、勉強になった。これからの自分の考えにも生かしていきたい。</p>
<p>正五角形を使って、いろんな角の三角比が求められるなんてびっくりした。あと、それぞれいろんな求め方があるなあと思った。</p>
<p>正直言うと、全然わからなかった。でも、みんなで協力したことがよかった。</p>
<p>おもしろかった。有名角以外は気にしたことがなかった。</p>
<p>この授業では、とても勉強になりました。私は <math>\sin</math> <math>\cos</math> <math>\tan</math> などの角が全く興味なかったけど、やってみると不思議だと思いました。こんなの絶対無理だと思っていたけど、みんなで力を合わせる楽しさが数学を解く楽しさへと一瞬だけ変化した気がしなくもないです。三角比は関数より元から好きだったけど、もっと好きになりました。</p>
<p>自分の力で有名角以外も求められるとは思ってもいなかったの、解けるとわかってすごいと思った。計算はめんどくさかったけど、答えが出たときはすばらしく感動した。結構楽しい授業だと思った。</p>
<p>18° の担当でしたが、まさか余弦定理とかを使わなくても求められたことにびっくりしました。自分にはない考え方を学べたので、よかったと思います。ちゃんとした答えがわかっていない問題だったので、導いた答えが合っているかすごく心配でしたが、色々な方法を試したり、ひたすら二重根号の計算をしたり、研究しているみたいでとても楽しかったです！</p>
<p>数学やのに発表とかしておもしろかった。有名角以外の三角比なんて求められないと思っていたけど、求められてびっくりした！結局わからなかったところもあったけど、解いていくのがたのしくてよかった。</p>
<p>最初はこんなん求めるの無理やろうなあと思っていたけど、班の人に教えてもらったり考え方を出し合ったりすることで、答えにたどりつけたと思う。22.5° と 67.5° の三角比については自分で正何角形をつかえばいいか解けたし、三角比も多分求められたのでとてもうれしかった。二重根号の有理化が難しかったけど、できるようになったかも。多分。</p>
<p>せっかく頑張ったのに、序盤で計算ミス+二重根号でよかったんだねというところから軽くやる気失せたけど、これで模試とかで出てもできるようになったしよかったと思います。</p>
<p>昔の人はこんなことを考えて何年もがんばってたのか～暇やな～というのを感じたことですが、もし自分が正五角形を使用するということを知らずに求めるように言われたら、多分できないんだろうなと思います。答えが分からない問題を解く不安？みたいなものを経験できてよかったと思います。</p>
<p>ちょっと三角比わかった気になってたけど、有名角以外の三角比を求めろってなった時に、よく分からなかったの、もっと勉強しなあかんと思った。部活とか忙しい中、ちょっとの間でも勉強しようと思った。そして、こういう難しい三角比とかも自分で求められるようになればいいと思った。</p>

コメント	点
余弦も正弦も使わないで、相似や合同を使って求めていたのでこういう解き方もあるんだとわかったし、説明もわかりやすかった。	19
ほかの班と違う考え方で求めていて面白かった。	13
声も大きくはっきりとしゃべってくれて、かつシンプルで良かったです。	20
今までにないやり方で、なるほどと思いました。ややこしい計算があまりないので良かったです。	20
図に書き込みをしながらだから分かりやすい。	15

ハキハキしてて良い。説明もバッチリ。他の班と違って、全部相似とかで求めているのがスゴイと思う。	20
新しい考え方で求めていた。	20
他の班とは解き方がおもしろかった。	19
棒とか使えていて、いとよろし。もぎが頑張ってた！	19
ハキハキしゃべってくれて分かりやすかった。図に求めた長さを書き足して行ってて分かりやすかった。余弦定理とかを使ってなくて良かった。	18
説明がものすごく丁寧で分かりやすかった。また黒板の図も大きくて見やすかった。	20
分かりやすかった。	14
棒で図をさして説明していて、とても分かりやすかった。シンプルに計算していてすごいと思った。	20
めっちゃ分かりやすい。もぎなしでも十分かと…	20
図を指しながら説明していたので分かりやすくてよかった。	15
比と直角三角形で書いていておもしろかった。	19
黒板をさし示したりしていて分かりやすかった！声も聞きやすくていい。	19
正弦定理・余弦定理を使っていなかった。	19
もぎがだらしない。でも正弦定理や余弦定理を使わないのは斬新だった。	16
この求め方の発表は初めてだったし、他の班と違いがあっっておもしろかった。 $\tan 18^\circ$ の値は計算したらいちいするか調べてみたい。	18
余弦、正弦を使わない解き方で他とは違ってよかった。ちゃんと図を指し示しながら発表できていた。声も大きく聞き取りやすかった。	19

## 研究事例 2

### 1 単元名 絶対値を含む不等式

### 2 単元の目標

絶対値を含む不等式を計算による方法とグラフによる方法で解けるようになる。  
また、発表・協議をとおして理解を深めるとともに、科学的なコミュニケーション能力を育成を図る。

### 3 テーマ「数学対決！！不等式の解法～計算VSグラフ～」

5つの問題について、計算派とグラフ派の2通りの解法を考え、4人ずつの10班で問題を分担し発表させた。最後に、計算派とグラフ派で2グループに分かれてディベートを行った。

### 4 単元の展開

#### (1) 問題解決・資料作成 <2時間>

模造紙1枚、清書用紙1枚を仕上げさせた。

#### (2) 各班発表 <2時間>

司会・タイムキーパーを班長2人に務めさせ、生徒による進行で、1班8分以内で解法の説明をさせた。その際に、作成した模造紙と黒板を利用して発表させた。

#### (3) ディベート <1時間>

司会を班長2人に務めさせ、記録係（各班1名）に自派の発言内容を全て記録させた。進行は以下の順。

① 各班の第1発言者が自派の解法のメリットについて主張する。

② 各班の第2発言者が相手班（同じ問題の別解班）の解法のデメリットについて主張する。

③ 5・7・9班の班長が計算派の、6・8・10班の班長がグラフ派の主張のまとめを述べる。

#### (4) 振り返り学習と解法の発展 <1時間>

#### (5) 提出物

各自・・・学習冊子とまとめ学習のプリント1枚

各班・・・清書用紙1枚 発表用模造紙 ディベート記録用紙1枚

### 5 評価方法

取り組みの状況を問題解決／取組意欲／資料作成／発表態度／聴講態度／ディベートの様子を6観点に分け、各生徒を観察によってA B C D評価を行った。提出物の出来具合による評価を行った。

## 6 参考等

### (1) 実施計画 (生徒提示分)

日程	12月 9日 (金) 5限	発表資料作り	<図書室>
	12月12日 (月) 3限	発表資料作り	<図書室>
	12月12日 (月) 7限	発表1~5班	<教室>
	12月13日 (火) 4限	発表6~10班	<教室>
	12月14日 (水) 2限	ディベート	<教室>

テーマ 数学対決!! 不等式の解法~計算VSグラフ~

5つの問題について、計算派とグラフ派の2通りの解法を考え、計10班で問題を分担し発表する。最後に、計算派とグラフ派で2グループに分かれてディベートを行う。

### 資料作成ルール

・模造紙1枚、清書用紙1枚を仕上げる。模造紙には、解答を全て書かず、グラフ派はグラフなどを、計算派は数直線などを書く。清書用紙は事前に提出する。

発表方法 司会・タイムキーパー (1、2班の班長)

・1班8分以内で解法の説明をする。

ディベートの方法 司会 (3、4班の班長) 記録係 (各班1名)

- ①各班の第1発言者が自班の解法のメリットについて主張する。
- ②各班の第2発言者が相手班 (同じ問題の別解班) の解法のデメリットについて主張する。
- ③5・7・9班の班長が計算派の、6・8・10班の班長がグラフ派の主張のまとめを述べる。

班員構成 1人2役!!

- ・班長: 全体のまとめ役・調整係 ( )
- ・資料担当: 資料作りの中心となる ( ) ( )
- ・発表担当: 発表の中心となる ( ) ( )
- ・議論担当: 第1発言者 ( ) 第2発言者 ( )
- ・記録係: ディベートの内容を記録する ( )

提出物

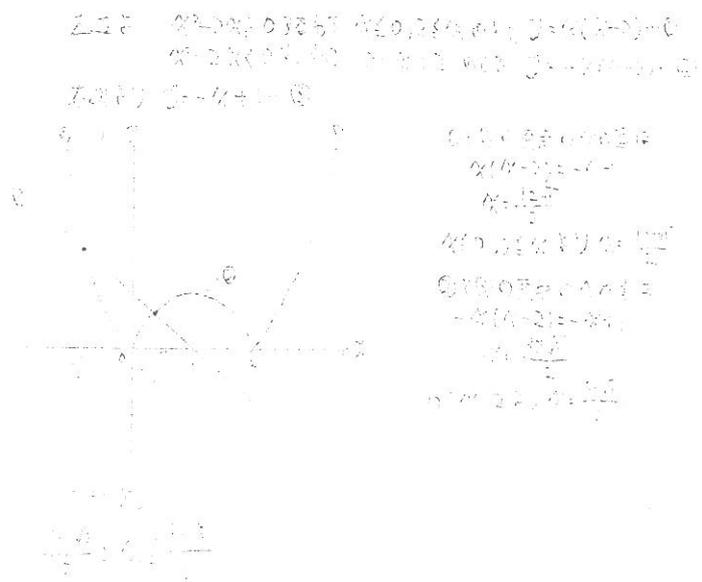
- ・各自・・・冊子 12月14日 (水) 2限後
- ・各班・・・清書用紙1枚 12月12日 (月) 3限後
- ディベート記録用紙1枚 12月14日 (水) 2限後

(2) 班別協議

清書用紙 ( ) 班

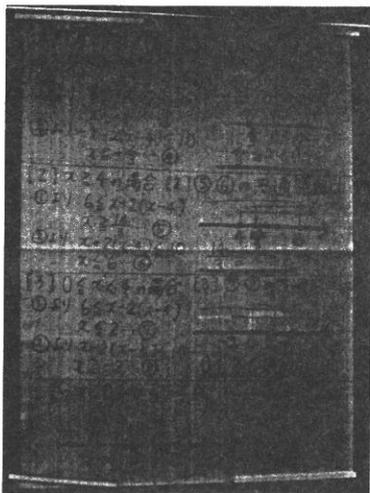
8 グラフで解決!! [1998 摂南大]

不等式  $|x^2 - 2x| \leq 1 - x$  を解け.

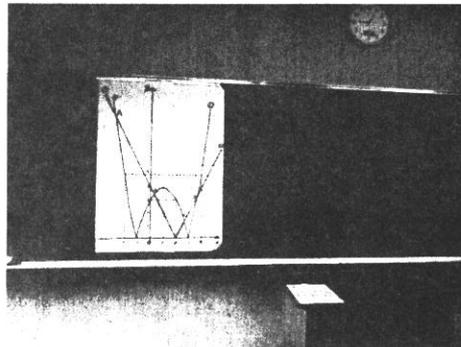


(3) 発表と準備物

【計算派】



【グラフ派】

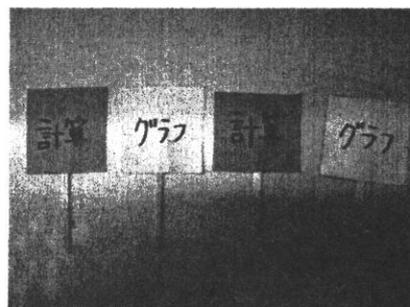


(4) ディベートと準備物

【タイトル】



【判定器具】



(5) ディベート記録用紙と発言内容等

【計算派】

1年3組 総合的な学習の時間 数学I 数学対決!! 不等式の解法～計算VSグラフ～ ディベート記録用紙

第一発言者		第二発言者		班長
1班	1班	5班		
3班	3班	7班		
5班	5班	9班		
7班	7班	free		
9班	9班			

【グラフ派】

1年3組 総合的な学習の時間 数学I 数学対決!! 不等式の解法～計算VSグラフ～ ディベート記録用紙 グラフ派

第一発言者		第二発言者		班長
2班	2班	6班		
4班	4班	8班		
6班	6班	10班		
8班	8班	free		
10班	10班			

ディベート発言内容			
計算派		グラフ派	
1 班のメリット	場合分けで条件の範囲と実際の範囲を数直線で表せる。	2 班のメリット	グラフを利用することで計算量が減る。
	交点を求めないから早くできる。		左辺、右辺で分けて計算し、ミスが少ない。
	計算が簡単。		
2 班のデメリット	グラフを作るのに時間を使ってしまう。	1 班のデメリット	場合分けでは一つの式が長くなり間違いやすい。
	グラフの目盛りなどを間違えると大きな影響が出る。		不等式の向きを間違いやすい。
	リスクが大きい。		
3 班のメリット	問題によって早く簡単にできる	4 班のメリット	グラフを利用することで計算ミスが少ない。
	数直線の方がグラフより分かりやすい。		大小関係、数値の正負も分かりやすい。
4 班のデメリット	作るのが大変。	3 班のデメリット	数直線の方が時間がかかる。
	線が増えるとより間違えやすい。		数値が難しくなると大小関係を間違えるリスクが高まる。
5 班のメリット	計算は普段からしているので手軽。	6 班のメリット	グラフを見たらすぐ分かる。
	場合分けをすれば一つ一つは簡単に分かる。		
6 班のデメリット	慣れるまで大変。丁寧に書くため時間がかかる。	5 班のデメリット	全ての式を数直線で表すのでどれがどの線か分かりにくい。
	交点を求めるのにグラフ力と計算力が必要になる。		場合毎に計算すると数が多く書くのが大変でミス発生。
7 班のメリット	あまり考えなくても機械的にできる。	8 班のメリット	グラフ一つ書けばよいのでスペースをとらない。
	数直線で表すので分かりやすい。		図を見たらある程度答が分かる。
8 班のデメリット	作るのに時間がかかり図がきたなければごちゃごちゃする。	7 班のデメリット	場合分けが多くなるほど式が長くなる。
			間違いやすいし時間がかかる。
			場合分けが多い分共通範囲と合わせるのが面倒。
9 班のメリット	数直線を使って共通範囲を求めるだけだから楽。	10 班のメリット	グラフさえ書けば左辺と右辺の大小関係がすぐ分かり答を導ける。
	一番最初に習った方法だからやりやすい。		グラフで起こりえない答が簡単に判断できるが計算だと吟味が大変。
10 班のデメリット	傾きがずれたりしたら、グラフに惑わされて正確な答を逃す。	9 班のデメリット	平方根の大小関係の証明が大変。
			グラフなら位置関係からすぐに分かる。

まとめ	グラフがわかりにくかったらミス連発。	まとめ	グラフは慣れれば強いし、理屈を理解しやすい。
	グラフより親しみやすく計算だけできる。		数直線を書いた後、どの線だったかわかりにくい。
	計算では、同じことをすればいいので分かりやすい。		グラフの方が見やすく分かりやすい。
	計算は場合分けが多いがそれ自体は簡単。		場合分けの多い問題ではグラフが有利。
	グラフ作成に時間がかかる。		グラフは書いていて楽しい。
	計算では場合分けで一つ一つがはつきりしている。		グラフにさえすれば不等号に従うだけ。
	グラフは一つにまとめるので書きにくく、読みにくい。		グラフも習ってきたから計算同様時間はかからない。
	数直線の方がぱっと見れば答が分かるので早い。		グラフで数値のだいたいの値が分かるのが楽。
			グラフで応用が高まる。
			見直したときに問題の全貌が分かりやすい。

## (6) 生徒の感想

感想
一つの問題でもいろいろな解き方があっておもしろかった。自分にあった解法が見つけれたらいいと思う。今までは絶対値の問題が出るとあきらめていたが、次からはちゃんと解いていきたい。
絶対値を含む不等式の復習ができ、自分たちの力をさらに高めていける機会を得ることができた。班で協力し資料を作成し、発表をした後ディベートを行ったことで、様々な考え方、計算とグラフの良い点、悪い点もしっかり確認できた。人前で発表することはあまりしないのでよい経験になった。
この活動でグラフのメリット・デメリット、計算のメリット・デメリットを知ることができ復習になった。問題によってグラフと計算を使い分ける必要があると思った。
敬遠していたグラフの解法について考えることができ良かった。まだすんなりとグラフの式を立てられないがこれから慣れていきたい。またどの解法がよいかを判断できるようになりたい。
グラフを書くのは難しかったが、計算、グラフの両方にメリットデメリットがあることに気づけた。センター試験ではこんな問題も早く解かなければいけないので、自分の解きやすい方法を見つけて得点したい。一つの問題にも様々な解法があって奥深いと思った。
不等式の解法にいろいろなパターンがあっておもしろいと思った。問題によって計算やグラフなどうまく使い分けてより簡単に正確に解けるようになりたい。不等式は、今までのいろいろな知識を復習できるものであり奥が深いと思った。
不等式の問題は結局何を聞かれているか分からなかったのが、この活動を通して、グラフが書けるようになり、何を聞かれているのか目で見て分かって良かったと思った。また今日の問題もグラフでやってみたいと思った。
グラフが復習できて良かった。この単元は苦手だったので友だちと話し合ったりして楽しく理解できた。
始め1人で問題に取り組んだとき不明だったり行き詰まったことがあったが、この活動によって理解度を深めら

<p>れ、解けなかったものも解けるようになった。ディベートをすることで解法の仕方が広がり学習能力の向上にもつながった。今後もこのような活動を続けることがよいと思った。</p>
<p>発表などを通してグラフと計算の違いを発見できて絶対値を含む不等式について理解が深まった。楽しく活動できた。</p>
<p>絶対値を含む不等式の復習ができ、より理解を深めることができた。</p>
<p>不等式には解法がたくさんあるので問題によって使いこなせるようになりたい。</p>
<p>グラフでの解き方をやってみて、以外とグラフは解きやすいと思った。でもそれは問題によって変わることも分かった。両辺を2乗する別解は場合分けが少なくてマスターすれば早く解くことができると思った。</p>
<p>今まで計算ですべて解決しようとしていたけど、グラフでやった方が分かりやすい問題もたくさんあった。それにグループで解くことによっていろんな解法を発見することができた。これからは自力で全て解けるようにしたい。</p>
<p>私は今回計算派だったが、グラフ派の人たちがきれいにグラフを書いて、ある2点でグラフが折れたりしているのを見ると、とてもおもしろいし、グラフでは視覚に訴えるなと思った。グラフと数直線では、グラフの方が明らかに場合分けが少ないので簡単に解けると思った。でもまだ、グラフは難しいという感覚を持っているのでそこを治してグラフを使っていきたい。</p>
<p>絶対値を2乗するという発想が僕にはなかった。今日の7番の問題はグラフで解くことも良いと思った。</p>
<p>自分たちで完成しないといけなかったので怒ることもたくさんあった。特に発表は数学では初めてですごく緊張した。他教科では原稿があるが、数学では資料が原稿代わり。どうすればより分かりやすく伝わるかと考えるのに苦労した。</p>
<p>同じ問題でもいろいろな解法があると分かった。問題によっていろいろ使い分けたい。</p>
<p>不等式の問題はいつも計算で解いていたのでグラフでの解法は新鮮だった。初めはグラフの書き方が分からず時間がかかってめんどくさいと思った。いろいろ問題を解いて少しは慣れたがまだ計算の方が早い気がする。一つの問題に解法が一つとは限らないのでいろいろな方向から考えることが大切なのかなと思った。</p>
<p>今まで学んできた解法を復習できる機会を持ててよかった。解法を比べてみるとそれぞれの対比ができ、自分はどちらが解きやすいかを確認できた。計算の方が解きやすいと思っていたけれど、自分でグラフも書けるようになりたい。</p>
<p>自分がよく分かっていないところも班の人が分かりやすく説明してくれて理解できた。また、自分と違うやり方があって知識が増えた。貴重な経験となった。よかった。</p>
<p>場合分けが難しかった。まだ慣れていないので、たくさん演習をしてできるようになろうと思った。計算とグラフを使い分けられるようになろうと思った。</p>
<p>テストの時に絶対値の問題が出たら「よっしゃ〜解ける可能性高っ!」と思えると思う。</p>
<p>一つの問題にたくさんの解き方があることに気づけた。問題によってグラフの方が解きやすいか、計算の方が解きやすいか違っていたので見極めが大切だと思った。計算一つにしてもいろいろのやり方があり、全ての解法で解けるようにしていきたい。</p>
<p>数学が少し分かるようになった気がする。</p>
<p>初めての活動だったが、班長をやってよかった。ディベートの司会をしたので各々の意見を聞けてとてもおもしろかった。</p>
<p>絶対値はとても苦手だったが、少しできるようになった。でもまだ場合分けが分からないところもある。夏にグラフで解いたときは意味が全く分からなかったが今回の5時間では理解できていて、成長したのかなと思った。</p>



## (8) 事後学習プリント

絶対値を含む不等式のとらえ

( ) 番 ( )

題のみならず、3時間にかけて総合的な学習の時間を活用して、準備、発表と十分な時間を経験してきましたが、それぞれの能力が伸び、予定通りに計画を進めることができました。発表に向けて効果的な資料を作成すること、また準備した資料を生かして発表をすることは、思ったよりも難しかったのではないだろうか。プレゼンテーションやディスカッションの能力は高校卒業後、様々な場面が必要となります。そのためには、今回の学習をぜひ活かしてください。今回みなさんは、数学の理解に関して課題を行い、その解決のメソッドやポイントをしっかり考えることができました。ここでもう一度解法についてまとめをします。

1 次の方程式、不等式を解け。

(1)  $3x-4=2$                       (2)  $|x-2|\leq 3$                       (3)  $|2x+1|>1$

2 不等式  $6\leq|x+2x-4|\leq 10$  の解のうち整数であるものの個数は  個である。

3 不等式  $x^2-2x-3>3|x-1|$  を解け。

4 不等式  $-x^2+3x+7\geq|x-1|+|x-2|$  を満たす  $x$  の値の範囲を求めよ。

5 不等式  $|x^2-2x|\leq 1-x$  を解け。

6 不等式  $|x^2-2x-3|\geq 2x-2$  を解け。

7 不等式  $|2x^2+x-6|-|3x^2-x-14|\geq 0$  を解け。(初登場！)

1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	

6 不等式  $|x^2-2x-3|\geq 2x-2$  を解け。【別解編】

7 不等式  $|2x^2+x-6|-|3x^2-x-14|\geq 0$  を解け。(初登場！)

【まとめ】・・・この活動を通しての感想を自由に書いてください。

### 研究事例 3

#### 1 単元名 場合の数と確率

#### 2 単元の目標

日常的ではあるが、やや複雑な場合の数や確率について、深く考察し、協議や発表をとおして理解を深めるとともに数学的な表現力を高める。

#### 3 テーマ「研究数学！ ～来年の教科書を先どり～」

来年度から先行実施される数学科の学習指導要領によって、新たに実施されることとなった課題研究を実施する。個人研究、班別協議、班別発表を主な活動とした。

#### 4 単元の展開

- |                   |                               |
|-------------------|-------------------------------|
| (1) 1時間目 (個別授業)   | 個人別課題の決定と検討と研究                |
| (2) 2時間目 (班別授業)   | 同じ課題を選択した生徒によるグループ別の<br>検討と研究 |
| (3) 3、4時間目 (一斉授業) | グループ毎の発表                      |
| (4) 準備物等          | 研究課題、発表記録用紙                   |

#### 5 評価方法

個人別提出物と班別発表および、個人の発表の記録を主な資料として、評価した。

#### 6 参考文献 数学科教科書「数学A」(数研出版、平成23年3月16日検定済み)

課題 I 完全順列 1年 組 16 番 氏名

5人がパーマネントプレゼント交換をした。くじ引きで無作為にプレゼント交換する相手を決めるとき、全員が他人のプレゼントにあたる場合について考えよう。

1, 2, 3, ..., n を並べ替えた順列において、各数の並ぶ順番がその数とすべて違う順列を n 個の完全順列という。上の問題は 5 個の完全順列の総数を求めることで解決する。

(例) 2 個の完全順列は (21) の 1 通りである。

問1 3 個の完全順列をすべて書きならべて、その総数を調べなさい。

231  
312  
(123)

4 個の完全順列をすべて書きならべて、その総数を調べなさい。

2341  
2413  
3124  
3412  
(1234)

5 個の完全順列の総数を調べなさい。

00000  
A

【感想など】

7 資料等

(1) 教材と個人提出物

課題 II 道順の総数の数え上げ 1年 2 組 17 番 氏名

道順の総数は組合せの考えを利用して求めることができた。ここでは、直接数え上げてみよう。

②

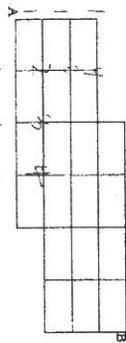


AからRまでの道順=AからPまでの道順+AからQまでの道順

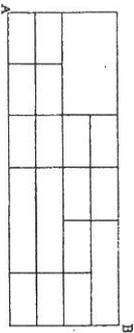
問1 上の図のAからBまでの道順の総数を求めよう。

2x3 = 6x5 = 30  
4x3 = 4x2x3 = 24  
35

問2 次の図のAからBまでの道順の総数を求めよう。



問3 次の図のAからBまでの道順の総数を求めよう。



【感想など】

算数の力が

トランプのカードには、クラブ、スペード、ダイヤ、ハートの4種類があり、それぞれ2から10までと、A(エース)、J(ジャック)、Q(クイーン)、K(キング)があり、さらに、ジョーカーがある。ジョーカーの役(ハンド)について、その確率を調べてみよう。

【例1】ジョーカーを除く52枚から5枚をとるとき、次の場合の数を求めよう。  
 (1) 5枚の組合せの総数

$$\frac{52 \times 51 \times 50 \times 49 \times 48}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 2598960$$

(2) 同じ数字(文字)が4枚そろふ場合の数(フォーカード)

$$13 \times 4 \times 4 = 208$$

2種類の数字(文字)が2枚と3枚になる場合の数(フルハウス)

$$13 \times 4 \binom{4}{2} \times 12 \times 4 \binom{3}{2} = 3744$$

ジョーカーを除く52枚のカードから5枚をとるとき、ツープレ(同じ数字(文字)2枚が2組そろふ。し、フォーカードを除く)ができる確率を小数第4位を四捨五入して小数第3位まで求めよう。

$$12 \binom{4}{2} \times 4 \binom{3}{2} \times 4 \binom{3}{2} \times 4 = 17352$$

$$12352 \div 2598960 = 0.00475$$

ジョーカーを除く52枚のカードから5枚をとるとき、スリーカード(同じ数字(文字)が3枚だけそろふ)だけ、フォーカード、フルハウスを除く)ができる確率を小数第4位を四捨五入して小数第3位まで求めよう。

$$(13 \times 4 \binom{4}{2}) + (12 \binom{4}{2} \times 4 \binom{3}{2}) = 54912$$

$$54912 \div 2598960 = 0.0211$$

$$= 0.021$$

【感想など】

ジョーカーを除く52枚のカードから5枚をとるとき、

1枚のジョーカー(エース)を除く52枚のカードから5枚をとるとき、

多くの人がジャックポットをするとあいこになる確率が大きくなることは経験的に知っている。

的に次の確率を求めよう。また結果を小数で表し、小数第4位を四捨五入して小数第3位まで求めよう。

2人がジャックポットをすると、手の出し方は $3 \times 3 = 9$ 通り  
 このうち、あいこになるのは、2人とも同じ手を出す3通り  
 よって、2人がジャックポットをすとき、あいこになる確率は  $\frac{3}{9} = \frac{1}{3} = 0.333$

3人がジャックポットをすとき、あいこになる確率

3人がジャックポットをすとき、あいこになる確率

$$3 \binom{3}{2} \left(\frac{1}{3}\right) + 3 \binom{1}{1} \left(\frac{1}{3}\right) \times \left(\frac{1}{3}\right) = \frac{3}{9} + \frac{3}{9} = \frac{2}{3}$$

1人がジャックポットをすとき、あいこになる確率は  $\frac{2}{3} = 0.667$

$$4 \binom{3}{2} \left(\frac{1}{3}\right) \times \left(\frac{1}{3}\right) + 4 \binom{2}{1} \left(\frac{1}{3}\right) \times \left(\frac{1}{3}\right) \times \left(\frac{1}{3}\right) = \frac{4}{9} + \frac{4}{9} = \frac{8}{9}$$

5人がジャックポットをすとき、あいこになる確率

$$5 \binom{4}{3} \left(\frac{1}{3}\right) \times \left(\frac{1}{3}\right) + 5 \binom{2}{1} \left(\frac{1}{3}\right) \times \left(\frac{1}{3}\right) \times \left(\frac{1}{3}\right) + 5 \binom{1}{1} \left(\frac{1}{3}\right) \times \left(\frac{1}{3}\right) \times \left(\frac{1}{3}\right) = \frac{10}{243} + \frac{10}{243} + \frac{5}{243} = \frac{25}{243}$$

$$1 - \frac{25}{243} = \frac{218}{243} = 0.897$$

【感想など】

ジャックポットをすとき、

(2) 授業の様子

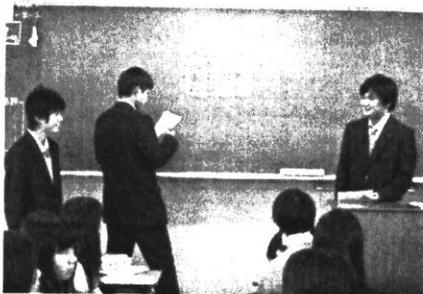
個人別課題の決定と検討と研究



グループ別の検討と研究



グループ別の発表



(3) 発表の記録

		課題研究 発表の記録				1年 2			
班	発表の内容				話し方や態度				よかった点
	A	B	C	D	A	B	C	D	
1									
2		(B)				(B)			わかりやすかった。
3									
4		(B)					(C)		順序よく説明していた。
5	(A)				(A)				わかりやすく、おもしろかった。
6		(B)				(B)			発表の仕方、おもしろかった。
7		(B)			(A)				上手に説明していた。
8									

		課題研究 発表の記録				1年 2			
班	発表の内容				話し方や態度				よかった点
	A	B	C	D	A	B	C	D	
1									
2		(B)				(B)			分かりやすく、おもしろかった。
3		(B)				(B)			みまこの説明がわかりやすかった。
4		(B)				(B)			説明が、良かった。
5		(B)			(A)				黒板の書き込み、説明。
6		(B)				(B)			けこう新し。
7		(B)			(A)				板書と説明が、良かった。
8									

#### 研究事例 4

##### 1 単元名 三角比

##### 2 単元の目標

教科書の例題などで測量の方法を見てきたが、実際にやってみることでより深く三角比を理解する。

##### 3 テーマ「測量」

$\tan$  を利用して校内の建物などの高さを測る。

##### 4 単元の展開

###### (1) $\tan$ を使った測量方法の復習

3人程度の班を作り、班内でメジャーと仰角を測る道具を使って高さを測る方法を確認した。

###### (2) 仰角を測る道具の作成

班で1つ仰角を測る道具を作り測量するものを決定した。

###### (3) 測量

高さの分かっているテニスコートそばの時計の高さを測った。その後、各班で決定したものの高さを測った。自転車置き場のスロープの長さから自転車置き場の高さを測る方法を考えた。

###### (4) 結果発表

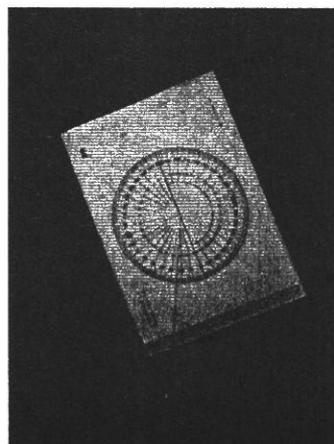
測ったものの高さを班ごとに発表した。

##### 5 解説

3時間かけて行った。内容を工夫すれば2時間に収められたと考えられる。測量方法は単純であるが実際やってみると地形などの影響がありメジャーでの測量が難しいものもあった。そのような場合に備えて10メートルの歩数を覚えておき、メジャーの代用とした。テニスコートそばの時計の高さはどの班も比較的良好な数値を得ていた。また、自転車置き場の高さについてはすぐに  $\sin$  を使えばよいことに気づいた。

##### 6 参考資料

###### (1) 測量道具





## 研究事例 5

### 1 単元名 「図形と計量」と「平面図形」

### 2 単元の目標

図形の性質を数量的に取り扱う場合の基本である「線分の長さ」と「角の大きさ」について、この2つのものを結びつける働きのある三角比について取り扱う。また、中学校において、二等辺三角形や平行四辺形の性質、円周角、合同や相似、証明の仕方などの基本的な事柄について学習している。これをもとに、三角形や円の性質を体系的に学習する。

### 3 テーマ「三角比・平面図形の難問に挑戦」

10個の問題を班ごとに選ばせ、模範解答・司会・板書・説明等の役割分担をして発表する。

### 4 単元の展開

#### (1) 問題の選定・問題解決・模範解答作成<3時間>

問題を班ごとに選ばせ、指定された用紙に解答を書かせた。

#### (2) 各班発表<3時間>

司会・板書・説明者にわかれて発表させた。また、別の班の班長にコメントをめた。

#### (3) 振り返りシートの完成・まとめ<1時間>

各班の採点(マークカードリーダーを活用)、コメントを完成させ、10題の問題の解答をさせた。

#### (4) 提出物

各自・・・学習冊子と振り返りシート(マークカードリーダーを含む)

各班・・・模範解答

### 5 評価方法

取組の姿勢・資料作成・発表態度・視聴態度・冊子の完成度の5つの観点に分け、各生徒を観察によって5段階で評価を行った。

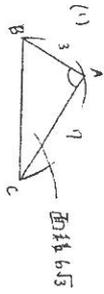
6 参考資料  
(1) 班別原稿

1  $\angle A$  が鈍角の  $\triangle ABC$  において、 $AB=3$ ,  $AC=7$  で、 $\triangle ABC$  の面積が  $6\sqrt{3}$  がある。

9分

- (1)  $\sin A$  の値を求めよ。また、 $\cos A$  の値を求めよ。
- (2) 辺  $BC$  の長さを求めよ。また、 $\angle B$  の大きさを求めよ。
- (3)  $\triangle ABD$  が正三角形となるように点  $D$  を直線  $AB$  に関して点  $C$  と反対側にとる。辺  $AB$  上に  $BE=1$  となる点  $E$  をとり、直線  $CE$  と  $BD$  の交点を  $F$  とする。このとき、線分  $BF$  の長さを求めよ。

(進研模範2004年11月)



(1)

$$S = \frac{1}{2}bc \sin A = 6\sqrt{3}$$

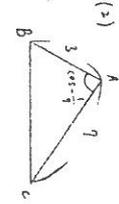
$$6\sqrt{3} = \frac{1}{2} \times 3 \times 7 \times \sin A$$

$$6\sqrt{3} = \frac{21}{2} \sin A$$

$$\sin A = \frac{6\sqrt{3} \times 2}{21} = \frac{4\sqrt{3}}{7}$$

$$\cos A = \pm \frac{1}{7}$$

$\angle A$  は鈍角だから  $\cos A = -\frac{1}{7}$



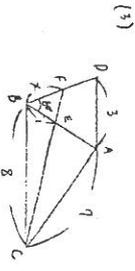
(2)

$$BC^2 = 3^2 + 7^2 - 2 \times 3 \times 7 \times \left(-\frac{1}{7}\right)$$

$$= 9 + 49 + 6 = 64$$

$$BC = \pm 8$$

$BC > 0$  より  $BC = 8$



(3)

$$FB = x$$

$$\triangle FBC \text{ の } S = \triangle FBE \text{ の } S + \triangle EBC \text{ の } S$$

$$\frac{1}{2} \times x \times 8 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} \times x \times 1 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \times 1 \times 8 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{8\sqrt{3}}{4} x = \frac{\sqrt{3}}{4} x + \frac{8\sqrt{3}}{4}$$

$$2\sqrt{3}x = \frac{\sqrt{3}}{4}x + 2\sqrt{3}$$

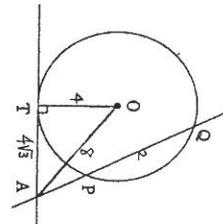
$$\frac{7\sqrt{3}}{4}x = 2\sqrt{3}$$

$$x = \frac{8}{7}$$

$\therefore BF = \frac{8}{7}$

8 右の図のように、円  $O$  の外部の点  $A$  を通る直線が円  $O$  と 2 点  $P, Q$  で交わり、 $A$  から円  $O$  に接線を引き、その接点を  $T$  とする。ただし、3 点  $A, P, Q$  はこの順に並んでいる。また、円  $O$  の半径は 4、 $OA=8$  である。

- (1) 線分  $AT$  の長さを求めよ。
- (2)  $PQ=2$  であるとき、線分  $AP$  の長さを求めよ。
- (3) 点  $O$  と異なる点  $O'$  を中心とし、2 点  $P, Q$  を通る円を作る。点  $A$  から円  $O'$  に 1 つの接線を引き、その接点を  $T'$  とする。 $\triangle OTA$  と  $\triangle OT'A$  の面積の比が  $\sqrt{2}:1$  のとき、線分  $O'A$  の長さを求めよ。



(進研模範2005年11月)

(1) 三平方の定理より

$$AT = \sqrt{OA^2 - r^2} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$$

(2) 方べきの定理より

$$AT^2 = AP \cdot AQ$$

$$(4\sqrt{3})^2 = AP \times (AP + PQ)$$

$$48 = AP \times (AP + 2)$$

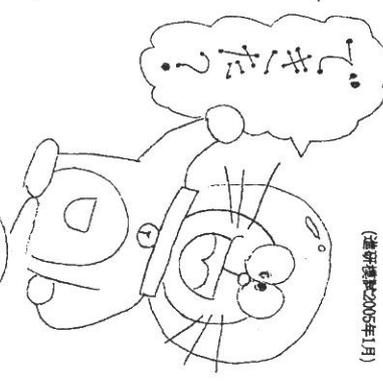
$$48 = AP^2 + 2AP$$

$$AP^2 + 2AP - 48 = 0$$

$$(AP + 8)(AP - 6) = 0$$

$AP = 6, -8$

$AP > 0$  より  $AP = 6$



(3) 方べきの定理より

$$PO \perp AT^2 = AP \cdot AQ$$

$$PO \perp AT'^2 = AP \cdot AQ$$

$$\therefore PO \perp AT = AT'$$

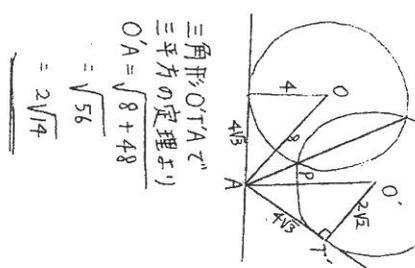
$$\triangle OTA : \triangle OT'A = \sqrt{2} : 1$$

$$\frac{1}{2} \times 4\sqrt{3} \times 4 : \frac{1}{2} \times 4\sqrt{3} \times OT' = \sqrt{2} : 1$$

$$\frac{8\sqrt{3}}{4} \times 4 : \frac{8\sqrt{3}}{4} \times OT' = \sqrt{2} : 1$$

$$4 : OT' = \sqrt{2} : 1$$

$$OT' = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$$



三角形  $OT'A$  で  
三平方の定理より

$$O'A = \sqrt{8 + 48} = \sqrt{56} = 2\sqrt{14}$$

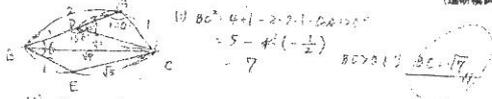


### (3) まどめの提出物

5 AB=2, AC=1,  $\angle A=120^\circ$  の  $\triangle ABC$  がある。

- 辺 BC の長さを求めよ。
- 辺 AB 上に、 $CD=\sqrt{3}$  となるような点 D をとる。  $\angle ADC$  の大きさを求めよ。
- (2) のとき、点 D の直線 BC に関する対称点を E とする。  $\triangle BCE$  の面積を求めよ。また  $\angle ABE=\theta$  となるとき、 $\cos\theta$  の値を求めよ。

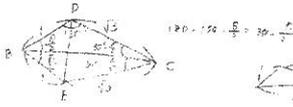
[進研模試2005年11月]



$$BC^2 = 4 + 1 - 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \cos 120^\circ = 5 - 4 \cdot (-\frac{1}{2}) = 7 \implies BC = \sqrt{7}$$

$$3 = AD^2 + 1 - 2 \cdot AD \cdot 1 \cdot \cos 120^\circ \implies 3 = AD^2 + 1 + AD \implies AD^2 + AD - 2 = 0 \implies (AD+2)(AD-1) = 0 \implies AD = 1$$

$$\cos \theta = \frac{AB^2 + BE^2 - AE^2}{2 \cdot AB \cdot BE} = \frac{2^2 + 3 - 4}{2 \cdot 2 \cdot \sqrt{3}} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$$



$$\sin \angle BEC = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\sin \angle BEC = \frac{1}{\sqrt{3}} \implies \angle BEC = 30^\circ$$

$$\cos \theta = \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

$$\cos \theta = \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

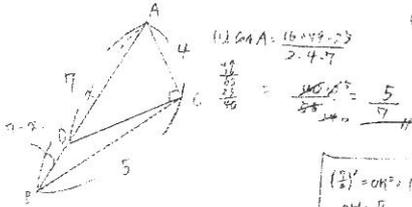
$$\cos \theta = \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

$$\cos \theta = \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

9 AB=7, BC=5, CA=4  $\triangle ABC$  がある。また、辺 AB 上に点 D があり、 $\angle ACD=90^\circ$  である。

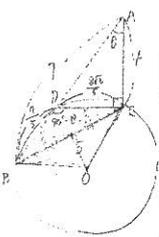
- $\cos A$  の値を求めよ。
- $\triangle ABC$  の面積を求めよ。また、線分 AD の長さを求めよ。
- $\triangle BCD$  の外接円の半径 R を求めよ。また、この円の中心を O とするとき、四角形 OBDC の面積を求めよ。

[進研模試2006年11月]



$$\cos A = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 \cdot AB \cdot AC} = \frac{49 + 16 - 25}{2 \cdot 7 \cdot 4} = \frac{40}{56} = \frac{5}{7}$$

$$AD = \frac{AC^2}{AB} = \frac{16}{7}$$



$$R = \frac{BC}{2 \sin \angle BDC} = \frac{5}{2 \sin \angle BDC}$$

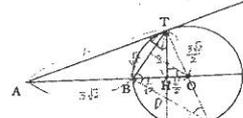
$$R = \frac{5}{2 \sin \angle BDC}$$

$$R = \frac{5}{2 \sin \angle BDC}$$

5 右図のように、円 O の外部の点 A から円 O に接線を引き、接点を T とする。また、円 O の中心 O と点 A を結ぶ線分と円の交点を B、点 T から直線 AB に垂線を引き、その交点を H とすると、 $\angle ATB = \angle BTH$  である。

- 線分 AH, AB の長さをそれぞれ求めよ。
- 円 O の半径 r を求めよ。
- 円 O の直径の1つを TC、直線 BC と TH の交点を D とするとき、線分 CD の長さを求めよ。

[進研模試2005年11月]



$$AH^2 = 4 = 26 \implies AH = \sqrt{26}$$

$$AB = 3\sqrt{2}$$

$$r = \frac{AB}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

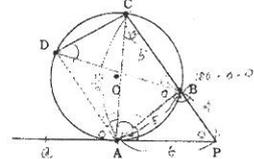
$$CD = \frac{1}{2} BC = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{3} = \sqrt{3}$$

$$CD = \sqrt{3}$$

9 図のように、円 O の周上に4点 A, B, C, D をこの順にとり、弧 AB と弧 BC と弧 CD の長さがそれぞれ等しくなるようにする。また、点 A における円 O の接線と直線 BC の交点を P とすると、 $PA=6, PB=4$  となった。

- 線分 PC の長さを求めよ。
- $\angle PAB = \angle CAB$  を証明せよ。また、線分 AC の長さを求めよ。
- 線分 AD の長さを求めよ。

[進研模試2006年11月]



$$PC = \frac{9}{4}$$

$$AC = \frac{15}{4}$$

$$AD = \frac{7}{2}$$

## 研究事例 6

### 1 単元名 関数の最大・最小（文章題）

### 2 単元の目標

身の回りにある題材から、文字の設定や方程式の作成を通して数学的な活動をする。また、その中でグループ協議や発表をし、アイディアの交流や相手に説明する能力を培うとともに、数学的な洞察力を身につける。

### 3 テーマ 「ソファ移動問題」

幅が1の通路がL字状にある。この通路を変形・分割せず通過できる図形（ソファ）の最大面積を考察する。最初は、ソファの形状を長方形に限定して話を進め、途中からどんな形でもよいのであれば最大面積はいくらでどんな形になるのか、という話に展開する。実験的なアプローチや、各自の数学的な洞察、他者と協力しての意見交流や発表など、様々なことを経験していきたい。

### 4 単元の展開

#### (1) 問題提起（10分）

引越のような身近な話題から、物を動かすときの通過領域について考える

#### (2) ソファが長方形の場合について最大面積を求める（10分）

長方形に限定した場合、結局どんな形にしても、 $1 \times 1$ の正方形の面積を越えることはない。これは、 $\sqrt{2} \times 1 / \sqrt{2}$ の長方形の場合でも同じである。

#### (3) ソファの形状を自由に設定した場合の最大面積と形状を考える（30分）

実験用の用紙を配布し、はさみで自由に切って実際に試してみることを勧める。

#### (4) 班に分かれて協議する（20分）

自分では思いつかなかった考え方を見聞きする中で、さらに考察を深める。具体的には、半径1の半円などは、割と思いつきやすいようである。また、曲がり角を通過する部分をバームクーヘンのようにくり抜いたらどうか、というアイディアも場合によっては出てくるかもしれない。

#### (5) 班のアイディアを発表する（20分）

各班で最も面積が大きいものを発表する。面積が正確に求められているかどうか、大きさを直感的に伝えるためには小数のほうがわかりやすいことなどを、発表を通して学びあいたい。

#### (6) まとめ（10分）

まずパソコンを使って、現時点で最大といわれている図形の移動する動画を見せる。次に、海外の文献より”Moving sofa problem”を紹介する。それを読みながら、実は20年以上も前から考えられていた問題であり、今も最大面積はわかっていないことを伝える。今高校で解くほぼすべての問題には決まった答が用意されているが、今回の題材のように、本来は答がまだわかっていないものはまだまだ多く、それを研究することが本来の科学の姿であることを理解させたい。

5 参考文献

“The Sofa Problem”

(Neal R. Wagnel American Mathematical Monthly Vol. 83, No3, March 1976)

6 参考資料

(1) 生徒対象のレジュメ

ソファ移動問題

2011/12/16

- ソファ移動問題とは



このソファが直角のコーナーを通過する最大値は?

- ソファが長方形の場合について

$1m^2$  になる長方形



- 面積が最大となるソファの形とは



$1.57m^2$



これが最大のソファだ!

- ソファ移動問題 (Moving sofa problem) について



発案者

《感想》

最初問題を見たときはどうも面白くないと思いましたが、  
 40年経って意見を述べると半角がなくなった。その後自分でこの半角から  
 作って大きさを測ると半角がなくなった。これはどうも  
 不思議なことに思っています。今では数学者が "the sofa constant" を  
 決定しようとしていると聞いて、少しだけソファ移動問題の  
 数学の面白さを知りました。

ソファ移動問題

2011/12/16

- ソファ移動問題とは

幅が  $1m$  の L字形の廊下にはソファを移動させる。  
 そのソファの面積が最大になる形はどのような形か?

- ソファが長方形の場合について



- 面積が最大となるソファの形とは



$\frac{2}{3} + \frac{\pi}{6}$



$\frac{1}{2}\pi$



- ソファ移動問題 (Moving sofa problem) について

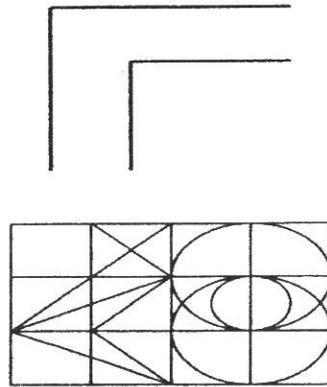
これはL字に最も最大になる面積のソファの形を求め、  
 その面積が最大となる形を求めようという問題だ。



《感想》

最初は面白くないと思いましたが、  
 40年経って意見を述べると半角がなくなった。その後自分でこの半角から  
 作って大きさを測ると半角がなくなった。これはどうも  
 不思議なことに思っています。今では数学者が "the sofa constant" を  
 決定しようとしていると聞いて、少しだけソファ移動問題の  
 数学の面白さを知りました。

(2) 実験素材



(3) 説明資料

